90學 年度大學推薦入學　數學科

本測驗爲計算證明題, 請將演算過程寫在答案紙, 務必標明題號。

1. 設 $N = 2^{131} + 192$ (20%)
   (i) 對於任意正整數 n, 證明:$2^{3n} - 1$ 是 7 的倍數。
   (ii) 證明 N 是 224 的倍數。
   (iii) N 是多少位的數。
   (iv) N 被 224 除後所得的商是多少位數? 其中 $\log_{10} 2 = 0.3010$.

2. 設 m 爲一非負之整數 (16%)
   (i) 試證: 對任意自然數 n,
   $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+m) = \frac{1}{m+2} \cdot n(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)。$$
   (ii) 利用 (i) 之結果, 試證:$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$。

3. 擲一公正骰子 4 次, 出現點數依序爲 a_1, a_2, a_3, a_4。試求 (16%)
   (i) $\max\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = 4$ 之機率。
   (ii) $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$ 之機率。

4. 設半徑爲 r 的圓內接及圓外切正 n 邊形的面積分別爲 s_n, t_n (16%)
   (i) 求 $s_8 : t_8$。
   (ii) 若 $s_n : t_n = 3 : 4$, 求n。

5. 平面上有三點 O, A, B, 而且 $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$, $\angle AOB = \theta$, $(0 < \theta < \pi)$。設點 P 在以 B 爲焦點, 過點 O 與點 A 的直線 ℓ 爲準線的拋物線上變動, 並記 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ (16%)
   (i) 試證:$(\vec{p} \cdot \vec{a})^2 - 2(\vec{p} \cdot \vec{b}) + 1 = 0$。
   (ii) 當線段 $\overline{OP}$ 把 $\angle AOB$ 二等分時, 且 $\overline{OP} = 2$, 求 θ 值。

6. 從點 $P(-1, 1, \sqrt{5})$ 分別向平面 $E : 3x + 4y - 6 = 0$ 及平面 $F : x - 2y + 2\sqrt{5}z + 3 = 0$ 作垂線, 其垂足分別爲 A, B 兩點 (16%)
   (i) 求點 A, B 的座標。
   (ii) 求 ΔPAB 的面積。