

本測驗為計算證明，請將演算過程寫在答案紙，務必標明題號

1. 證明任一自然數  $n$ ,  $2^{12n} + 1994$  皆可被 210 整除。 (13%)
2. 設正三角形被任一通過其重心的直線分成二部分，令  $r$  為此二部分的面積比值(大比小)，求  $r$  的最大值與最小值，並證明之。 (13%)
3. 現有寫上  $1, 2, \dots, n$  ( $n \geq 2$ ) 的卡片各 3 張，共  $3n$  張，若從這些卡片中任意抽出 4 張，求出現兩對相同數的機率。 (13%)
4. 設  $a$  與  $b$  均為常數，試以  $a, b$  之值，考慮聯立方程式 
$$\begin{cases} x + ay = b \\ ax + 4y = 6 \end{cases}$$
 (15%)
  - (i) 求只有一組解之條件為何？其解  $(x, y)$  是多少？
  - (ii) 求有無限多解之條件為何？
  - (iii) 求無解的條件為何？
5. 設  $D, E$  二點分別位於  $\triangle ABC$  之  $\overline{AB}, \overline{AC}$  邊上，已知  $AD : DB = 5 : 3$ ,  $AE : EC = 3 : 2$ , 又知  $F$  為  $\overline{DE}$  之中點，而  $\overline{AF}$  的延長線交  $\overline{BC}$  於  $M$  點，求  $BM : CM$ 。 (13%)
6. 設球面  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 11$  與平面  $z = 0$  交於  $C_1$ , 又球面  $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4$  與平面  $x + y = 1$  交於  $C_2$ , 證明  $C_1$  與  $C_2$  在同一個球面上，並求此球面的球心坐標與半徑。 (13%)
7. (i) 已知當  $0 < x < \frac{3}{2}$  時，拋物線  $y = -x^2 + 2x$  與直線  $y = ax$  有交點，求  $a$  的範圍。 (10%)  
(ii) 若  $y = ax$  把拋物線  $y = -x^2 + 2x$  與  $x$  軸圍成的區域面積二等分，求  $a$  的值。 (10%)