

本測驗為計算與證明,共七大題,請將演算過程寫在答案紙上,先標明題號,再作答

1. 試求級數之和

$$S_n = 1 + 2 \cos x + 2 \cos 2x + \cdots + 2 \cos nx \quad x \in \mathbf{R}$$

$\mathbf{R}$  為所有實數所成之集合 (12分)

2. 證明方程式  $\sin x = \frac{x}{100}$  的根落在區間  $[-100, 100]$  裡面,其次請問共有多少個實根? (15分)
3. 已知  $(x, y)$  為圓錐曲線  $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 1$  上的點,試判斷該曲線之圖形並求  $x^2 + y^2$  之最大值與最小值? (13分)
4. 從區間  $[-7, 4] = \{x \in \mathbf{R} \mid -7 \leq x \leq 4\}$  中任取一數  $x$  滿足不等式

$$\log_4(x^3 - 5x + 8) > 1$$

之機率為多少? (13分)

5.  $A$  是區間  $[0, 1]$  之子集合,  $A \subset [0, 1]$ , 如果將之表為3進位

$$A = \left\{ x \in [0, 1] \mid x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots \right\}$$

其中分子  $a_i, i = 1, 2, 3, \cdots$  滿足

$$a_1 \in \{0, 2\}, \quad a_2 = 1, \quad a_i \in \{0, 1, 2\}, \quad i \geq 3$$

試描繪  $A$  之圖形並計算其長度? (15分)

6. 試利用牛頓法計算無理數  $\sqrt{2}$  之值至小數點第九位. (12分)

7. 已知 20604, 53227, 25755, 20927, 78421 可被 17 整除,證明行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

也可被 17 整除 (15分)