准考証號碼: 姓名:

說明: 共七大題, 七頁試題, 總共 130 分。並請寫完整的解答過程。背面也可作答, 但請將題號註明清楚。

1	2	3	4	5	6	7

1. 令 $n = 2^{2000}$。

   (a) (5 分) 數字 n 會是幾位數字?

   (b) (5 分) 數字 n 的末位數字是多少?

   (c) (10 分) 數字 n 的首二位數字是多少?

   $(\log_{10} 2 \doteq 0.301030, \log_{10} 3 \doteq 0.4771, \log_{10} 7 \doteq 0.8451, \log_{10} 11 \doteq 1.0414)$

2. 設點 $P(a,b)$ 在橢圓 E 之上, 而 E 的方程式為

$$E: \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1。$$

(a) (10 分) 求 a^2+2b^2 的極大值 M 與極小值 m。

(b) (10 分) 製圖繪出橢圓 E 及區域 $R=\{(x,y)\mid m\le x^2+2y^2\le M\}$ 之圖形, 並標出產生極大值 M 與極小值 m 之點, 及其座標。

3. 實數完備性的其中一種敘述方式為『遞增數列 $\langle a_n \rangle$, 若具有上界 L, 其極限必存在』, 即, 無窮數列 $\langle a_n \rangle$, 若 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots$, 且 $a_n \le L$, $n = 1, 2, \ldots$, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在。今有一數列 $\langle a_n \rangle$ 定義如下:

$$a_1 = \sqrt[3]{6}, \quad a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n}, \; n = 1, 2, \ldots$$

(a) (5 分) 試利用數學歸納法證明, $L = 2$ 是數列 $\langle a_n \rangle$ 的上界。

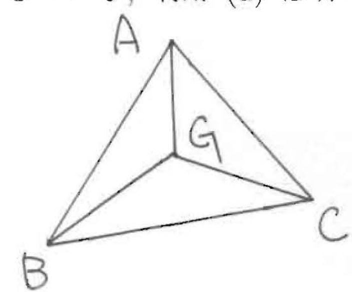
(b) (5 分) 請利用上述實數完備性, 證明 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在。

(c) (5 分) 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 的值。

4. 三角形重心為三中線交點。

(a) (10 分) 若 G 為三角形 ABC 內部一點且滿足 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, 試證明 G 為三角形 ABC 之重心, 且 $\triangle GBC=\triangle GCA=\triangle GAB$ (這裡的 $\triangle GBC$ 係指三角形 GBC 的面積, 以此類推)。

(b) (10 分) 令 P 為三角形 ABC 內部一點, 滿足 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+6\overrightarrow{PC}=\vec{0}$, 利用 (a) 證明 $\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=2:3:6$。



5. 緯度是指某點與地球球心連線和地球赤道面所形成的夾角, 其數值在 0° 至 90° 之間, 位於赤道以北稱北緯, 位於赤道以南稱南緯。設某一地球儀南北極之點座標分別為: 南極$(-1,2,1)$ 以及北極$(3,-2,5)$。

(a) (10 分) 求包含該地球儀南緯 30° 線之平面方程式。

(b) (10 分) 點 $P(2+\frac{\sqrt{6}}{2}, -1+\sqrt{6}, 4+\frac{\sqrt{6}}{2})$ 是位在哪條緯度線上?(請回答南緯或北緯多少度)

6. 丟 100 次 (公平的) 銅板,

(a) (5 分) 求恰好出現 1 次正面的機率與恰好出現 99 次正面的機率。

(b) (10 分) 設恰好出現 50 次正面的機率為 p, 試用 p 的函數表示出現 52 次以上 (包含52次) 正面的機率。

7. 如果 $f(x)$ 有以下性質, 我們稱它為凹函數: 對任何 x_1 和 x_2, 下式成立 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

(a) (5 分) 證明 $\sin x$ 在 $0 \leq x \leq \pi$ 線段內, 為凹函數。

(b) (5 分) 假設 $f(x)$ 為凹函數。證明 $f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}$。

(c) (5 分) 假設 $f(x)$ 為凹函數。利用 (b), 證明 $f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$。

(d) (5 分) 假設 $f(x)$ 為凹函數, n 為任意正整數。利用數學歸納法證明:

$$f(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)}{n}。$$