

准考証號碼:

姓名:

說明: 共八大題, 九頁試題。並請寫完整的解答過程。背面也可作答, 但請將題號註明清楚。

1	2	3	4	5	6	7	8

1. (10 分) 設空間中四點  $A(4, 0, 2)$ ,  $B(3, 3, 2)$ ,  $C(3, 0, 4)$ ,  $D(3, 0, 2)$ .

a. 求  $\overrightarrow{DA}$  與  $\overrightarrow{DB}$  的夾角。

b. 求四面體  $ABCD$  的體積。

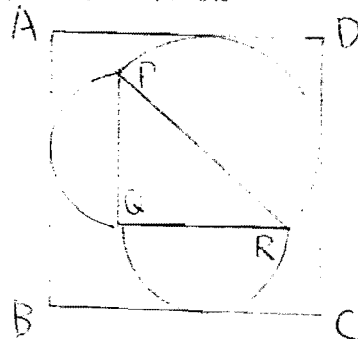
2. (15 分) 已知圓  $C: x^2 + y^2 = 9$  及直線  $L: y = 2x + k$

a. 若  $C$  與  $L$  交於相異兩點, 求  $k$  值的範圍。

b. 試求圓  $C$  與直線  $L$  所截線段  $\overline{AB}$  的中點  $M$  的座標。

c. 當  $k$  值變化時, 試求  $M$  點的軌跡方程式。

3. (10 分) 如圖, 有一個直角三角形  $PQR$ , 直角在  $Q$  點, 以其三邊為直徑作三個半圓。矩形  $ABCD$  的各邊與半圓相切, 且平行於  $PQ$  或  $QR$ 。如果  $\overline{PQ} = 6$ ,  $\overline{QR} = 8$ , 求矩形  $ABCD$  的面積。



4. (10 分) 給定正整數  $a, b, n$  滿足  $n < a$  及  $n < b$ , 證明:

$$C_n^{a+b} = \sum_{k=0}^n C_k^a C_{n-k}^b$$

5. (10 分)

a. 證明: 當  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  時,  $\theta < \tan \theta$ . (Hint: 畫出單位圓, 將  $\theta, \tan \theta$  以圖形上的面積表示)

b. 證明: 對任意正整數  $n$ , 複數  $(n + \frac{3}{2}i)^n$  的實部及虛部, 均為正數。(Hint: 考慮幅角大小)

6. (10 分) 考慮數列:  $\log_2 3, \log_3 4, \log_4 5, \dots, \log_n(n+1), \dots$ , 證明此數列是遞減的. (Hint: 證明過程中, 會用到算數平均數大於幾何平均數)

7. (10 分) 將正數  $x$  的整數部分記為  $[x]$ , 小數部分記為  $\{x\}$ . (例如:  $[\pi] = 3, \{\pi\} = \pi - 3$ .) 找出所有正數  $x$ , 滿足  $[x]^2 = x \cdot \{x\}$ .

8. (本題共四小題, 分二頁)

a. (5 分) 令  $P(x_0, y_0, z_0)$  是三維空間中的任一點,  $S: ax + by + cz + d = 0$  是空間中的一平面。證明點  $P$  到平面  $S$  的距離為

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

b. (5 分) 設空間中一直線  $L: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ z = 0. \end{cases}$  證明通過  $L$  的任一平面可以表示為

$E(\alpha, \beta) = 2\alpha x - \alpha y + \beta z - 5\alpha = 0$ , 其中  $\alpha, \beta$  是任意實數。

8. (本題共四小題, 分二頁)

c. (5 分) 承上頁 b. 小題, 找出原點  $(0, 0, 0)$  到通過  $L$  的任意平面  $E(\alpha, \beta)$  之最大距離。

d. (10 分) 計算原點到  $L$  的距離, 並說明為何此距離恰巧等於 c. 小題之答案。