

國立成功大學數學系

111 學年度 學士班申請入學筆試

2022年5月21日

姓名：_____

個人申請編號：_____

試題說明：

1. 本試卷共9頁、10大題，總分為 100 分。
2. 測驗時間為 150 分鐘。
3. 請在每一試題所屬頁面作答，若使用試題背面，請標示清楚。
4. 請完整寫出解答過程。

Page	Points	Score
1	10	
2	10	
3	15	
4	15	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
Total:	100	

1. 令函數

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

(a) (3 points) 求 $f(x)$ 的導函數。

(a) _____

(b) (3 points) 求 $g(x)$ 的導函數。

(b) _____

(c) (4 points) 求導數 $(g \circ f)'(1)$.

(c) _____

2. (10 points) 求函數

$$y = f(x) = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}$$

的圖形與 x 軸在 $0 \leq x \leq 6$ 所圍區域繞 x 軸的旋轉體體積。
(列出正確的積分形式得5分)

3. 令函數

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}.$$

(a) (5 points) 求 $f(x)$ 的遞增、遞減區間，並藉此判斷其極值。

(b) (5 points) 求 $f(x)$ 的反曲點，並判斷其凹向性。

(c) (5 points) 畫出 $f(x)$ 的大略圖形。

4. 給定一個雙曲線 Γ :

$$\left| \sqrt{(x-8)^2 + (y+2)^2} - \sqrt{x^2 + (y+2)^2} \right| = 6.$$

(a) (5 points) 求其中一個焦點座標。

(a) _____

(b) (5 points) 將 Γ 以原點為中心逆時針旋轉 30° 得雙曲線 Γ' . 求 Γ' 的其中一條漸近線之方程式。

(b) _____

5. (5 points) 已知複數 z 與其共軛複數的和為 6, 且在複數平面上 z 與原點的距離為 5, 試求複數 z 。

5. _____

6. (a) (5 points) 已知某種快篩試劑對某病毒的檢驗，偽陰率10% (即帶原者做檢驗有10%的機會呈陰性反應，其他呈陽性反應)，而偽陽率也為10% (即未帶原者做檢驗有10%的機會呈陽性反應，其他呈陰性反應)。現推估有2%的民眾為此病毒帶原者。若小明以此試劑檢驗結果呈陰性反應，試求其確實為非帶原的機率為何？

(a) _____

- (b) (5 points) 已知某家保險公司推出COVID-19的防疫保單，保險費是500元。對於染上此疾病的民眾提供理賠保障。理賠金額分類如下。假設推估染疫的機率

嚴重程度	輕	中	重
機率	99.75%	0.20%	0.05%
理賠金額	10000	20000	30000

是15%。若不計其他營運成本，試問保險公司可從每張保單獲利的期望值是多少？

(b) _____

7. 已知兩平面 $E_1 : x - y - z = 3$ 和 $E_2 : x + by + z = 1$ 所夾的銳角為 60° 。假設 $b > 0$ 。
- (a) (5 points) 求 b 的值。

(a) _____

- (b) (5 points) 令點 P 是平面 E_1 上離原點 $(0, 0, 0)$ 最近的點。求 P 點座標。

(b) _____

8. 我們說平面上一點 (a, b) 是函數 $f(x)$ 的對稱點如果

- (a, b) 落在 $f(x)$ 的函數圖形上
 - $(a + h, b + k)$ 落在 $f(x)$ 的函數圖形上則 $(a - h, b - k)$ 也落在 $f(x)$ 的函數圖形上
- (a) (7 points) 找出多項式 $x^3 + 3x^2 + x$ 的對稱點。

(a) _____

(b) (3 points) 找出多項式 $x^5 - 10x^4 + x^3 + 154x^2 - 38x - 20$ 的對稱點。

(b) _____

10. (a) (5 points) 試證 $\sqrt{6}$ 為無理數。

(b) (5 points) 下圖說明如何在數線上用直尺和圓規標出 $\sqrt{2}$ ：首先用直尺圓規做出邊長為一的正方形，連接對角線，以零為圓心對角線為半徑畫出的圓弧即交數線於 $\sqrt{2}$ 。請描述(佐以圖形尤佳)如何在數線上標出 $\sqrt{6}$ (假定所有整數 $\dots, 0, 1, 2, \dots$ 皆已標出)。

