國立成功大學數學系

109 學年度

學士班申請入學

數學學科筆試

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

個人申請編號：________________________

姓名：________________________

試題說明：

1. 本試題含十大題，總分一百分。
2. 測驗時間：150 分鐘
3. 請在每一試題所屬頁面作答，若使用試題背面，請標示清楚。
4. 請**完整寫出解答過程**。
5. 本考試卷總共有 14 頁(含封面與空白頁面)。

題號	滿分	得分
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
10	10	
總分		

1. 令 p,q 為互質的整數。假設一次多項式 $px-q$ 為整係數 n 次多項式

$$f\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的一個因式，試證明 $p|a_n$ 且 $q|a_0$ 。

2. 令 b 為一個正整數。將正整數 N 表示形如

$$a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot b + a_0$$

的級數和，其中 $0 \le a_0, \cdots, a_n \le b-1$，稱符號 $\left(a_n a_{n-1} \cdots a_0\right)_b$ 為正整數 N 的 b 進位表示。舉例來說，因為 $37 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$，則 $37 = \left(100101\right)_2$。

若正整數 A 以 3 進位表示時為 10 位數，試問 A 以 5 進位表示時為幾位數？
($\log 2 = 0.301, \quad \log 3 = 0.477$ 。)

3. 假設$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，試證明$\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$。

4. 已知ΔABC三邊長分別為$\overline{BC}=7,\overline{CA}=9,\overline{AB}=8$。假設$P$為$\Delta ABC$內部一點，

且D,E,F是P到$\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$各邊垂線之垂足。記$\overline{PD}=x,\ \overline{PE}=y,\ \overline{PF}=z$。

試求出$\frac{7}{x}+\frac{9}{y}+\frac{8}{z}$的最小值，並求出此時$P$點的位置。

5. 已知圓$C: x^2+y^2=1$與圓外一直線$L_1: x+y=2$。在L_1上任取一點P，做圓C的兩條切線，其切點分別記為A,B。令L_2表示過原點且垂直於L_1的直線，Q為線段$\overline{AB}$與L_2的交點。試證明Q點坐標與P點的選取無關。(所引用之公式均須證明。)

空白頁

6. 在平面坐標系中，ΔABC 的頂點 $A(-2,-1), C(4,-1)$ 且 B 在橢圓

$\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$ 上。試計算 $\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin B}$ 之值。

7. 一盒火柴中有 n 根火柴棒，阿隆買了兩盒並把它們分別放置於外套兩邊的口袋裡。每次點火時，阿隆會隨機從其中一個火柴盒拿出一根火柴。假設阿隆每次點火都會成功且他用完最後一根火柴時，仍然會把火柴盒放回口袋中。

(1) 若某次點火時，阿隆發現拿出的火柴盒是空的，此時另一個火柴盒裡剩下 k 根火柴的機率為何？此處 $0 \le k \le n$ 。

(2)根據上述結果，試計算

$$\binom{2n}{n} + 2\binom{2n-1}{n} + 2^2\binom{2n-2}{n} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$$

8. 有一數列$\langle a_n \rangle$形式如下：

第一項$a_1 = 1$

第二項$a_2 = 3+5$

第三項$a_3 = 7+9+11$

第四項$a_4 = 13+15+17+19$

第五項$a_5 = 21+23+25+27+29$

(1)求第n項所有數字和之一般式，並證明之。

(2)求$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$之一般式，並證明之。

9. 若 a,b,c,x,y,z 為實數且滿足

$$a^2+b^2+c^2=16, \qquad x^2+y^2+z^2=25$$

則 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$ 絕對值最大為何？請詳細說明。

10. 假設E為二次方程式

(1.1) $$5x^2+4xy+2y^2=1$$

所決定之曲線，下列步驟將協助我們決定E的圖形。

(1) 試求出一個2×2矩陣$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$滿足$A^T=A$且

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5x^2+4xy+2y^2$$

其中$A^T=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$。

(2) 找出所有滿足$Av=\lambda v$之組合(λ, v)，其中λ為一實數且v為一個非零的2×1矩陣。提示：$Av=\lambda v \Leftrightarrow (A-\lambda I_2)v=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(3) 在(2)的解答中，找出滿足下列條件的兩個組合(λ_1, v_1)與(λ_2, v_2)：

$$\lambda_1<\lambda_2 \text{且} |v_1|=|v_2|=1 \text{，}$$

此處$|v|$為將v視為向量時的長度。若$v_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$且$v_2=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$，記$C=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$，試證明$C^{-1}=C^T$且$A=CDC^T$，此處$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$。

(4) 試說明當C的行列式大於 0 時，C為一個旋轉矩陣。

(5) 令$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=C\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，將(1.1)中的等式改為$x'$與$y'$的方程式，並描述新的方程式所決定的二次曲線為何種曲線？

空白頁