國立成功大學數學系

108 學年度

學士班申請入學

數學學科筆試

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

個人申請編號：________________________

姓名：________________________

試題說明：

1. 本試題含九大題，總分一百分。

2. 測驗時間：150 分鐘

3. 請在每一試題所屬頁面作答，若使用試題背面， 請標示清楚。

4. 請完整寫出解答過程。

5. 本考試卷總共有 12 頁(含封面與空白頁面)。

題號	滿分	得分
1	10	
2	10	
3	15	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	15	
總分		

1. (10 分)有 n 個人受邀參與擲骰子遊戲，每個人擲三個六面公正骰子(點數 1-6)。令 A 表示以下事件：至少有一人擲出點數「666」。試問 n 至少要多少才會讓「 $P(A) > 0.3$ 」成立，此處 $P(A)$ 表示事件 A 的機率。
$\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 43 \approx 1.633$

2. (10 分)假設 n 是自然數，試計算

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!(2n-2k)!}$$

提示：可考慮 $(1+x)^{2n}$ 。

3. (15 分)假設數列$\left(a_n\right)$滿足

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = n^2, \quad n \geq 1$$

試計算$\sum_{k=1}^{n} a_k$ 。

4. (10 分)令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。

(a) 試求出所有滿足方程式

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

的解(c,x,y) 。

(b) (加分題)計算 A^{2019} 。

5. (10 分)

(a) 若 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 為不平行的非零向量，試證明以 $\vec{a},\vec{b}$ 為兩鄰邊的平行四邊形面積 $A=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$

(b) 承上，若 $\vec{a}=(a_1,a_2)$ ，$\vec{b}=(b_1,b_2)$ 且 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ ，試證明 $A=\left|\Delta\right|$ 。

6. (10 分)給定空間中三點 $A(1,0,0),B(0,2,0),C(0,0,-1)$，試求出 ΔABC 的垂心。

7. (10 分)假設 x_1, x_2, x_3 為三次方程式 $x^3 - ax^2 + (a+1)x + 11 = 0$ 的三個根，其中 $a \in \mathbb{R}$ 。

(a) 請寫下以 x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 為三根的三次方程式。

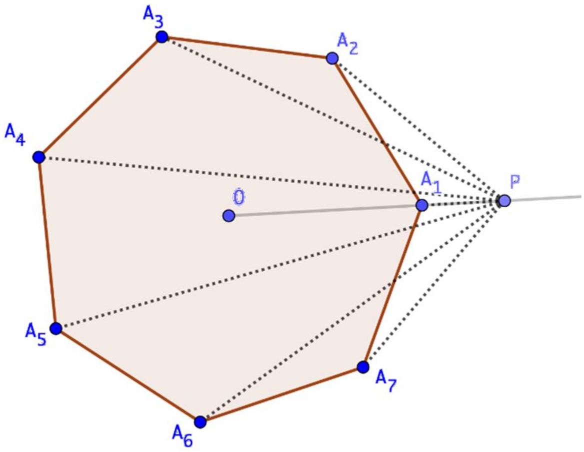
(b) 找出 a 使得 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 為最小。

8. (10 分)假設 A 和 B 為三位數正整數且 $550 < B < 600$。若 $\log B$ 尾數是 $\log A$ 尾數的兩倍，則 $A = ?$

9. (15 分)考慮平面上以 O 為圓心，半徑為 R 的圓及其一內接正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$。在**射線**上 $\overrightarrow{OA_1}$ 上取一點 P 使得 A_1 落在 O 與 P 之間，如圖所示。

試證明

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\cdots\overline{PA_n}=\overline{PO}^n-R^n$$



提示：可考慮複數 n 次方根。

(本頁空白)