



1. (10%) 對於所有的正整數  $n$ ，證明：

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

得分
----

2. (10%) 令  $\omega = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ 。對於所有的複數  $x, y$ ，證明：

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = (x - \omega y)(x - \omega^2 y)(x - \omega^3 y)(x - \omega^4 y)$$

得分
----

3. (10%) 福爾摩斯在倫敦西敏市附近調查殺人事件後，走回貝克街 221B 號的路上被咖啡店傳出的香氣吸引，於是進了店坐下來點了杯耶加雪夫。服務員端上咖啡，福爾摩斯啜飲一小口，「好燙！」

已知咖啡 5:10 剛端上時溫度是  $T(0) = 87$  度，等到 5:20 時溫度是 69 度。根據牛頓冷卻定律，若室溫是 15 度，則咖啡溫度隨時間變化的函數是  $T(t) = 15 + 72 \cdot 10^{kt}$ ，其中  $k$  是一個常數。福爾摩斯喜歡咖啡在 63 度時飲用，請問要等到什麼時候？

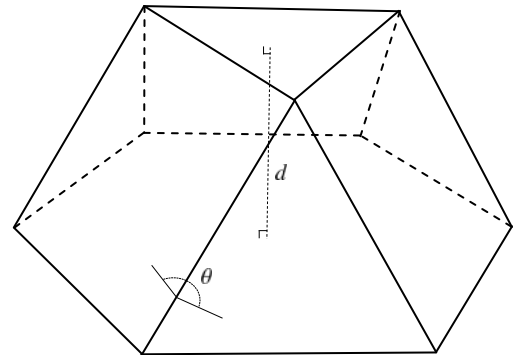
(利用  $\log_{10} 2 \approx 0.3$  與  $\log_{10} 3 \approx 0.48$  化簡答案。)

得分
----

4. 有一款帳篷的設計圖如右，其中下底面是正六角形，上底面是正三角形，側面是三個正方形與三個正三角形交錯相鄰。

(7%) 若帳篷的所有邊長都是 1，求兩個底面的距離  $d$ 。

(8%) 若帳篷的兩個相鄰側面夾角是  $\theta$ ，求  $\sin \theta$ 。



得分
----

5. (10%) 給定空間兩點  $A(4, -1, 3)$  與  $C(-5, -2, 6)$ ，試求所有的點  $B$  使得  $|\vec{OB}| = 3$  且  $\vec{OA} \times \vec{OB} = \vec{OC}$ 。

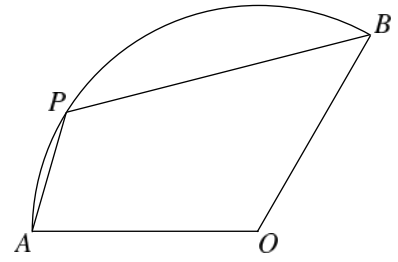
得分

6. (15%) 旋轉矩陣  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  將直線  $y = -x + 5$  變換到直線

$y = mx + \sqrt{13}$ ，試求所有的矩陣  $A$  與斜率  $m$ 。

得分

7. (10%) 右圖扇形  $OAB$  的圓心角為  $\frac{2\pi}{3}$  且半徑為 1。令  $P$  為弧  $AB$  上的動點，求四邊形  $OAPB$  的最大面積。



得分



8. (10%) 一個箱子中裝了 100 顆外型相同的球。其中有 30 顆球是紅色的，其餘是藍色的。若從箱子中逐一抽出 20 顆球且不放回箱子中，請問所抽出的第 10 顆球是紅色的機率是多少？(使用  $C_m^n$  符號表示答案即可)

得分

9. (10%) 某影劇粉絲團要從日劇「月薪嬌妻」和韓劇「太陽的後裔」中選出最愛的戲劇。粉絲團中有 300 人是哈日族，有 200 人是哈韓族，每個粉絲不會互相影響投票。根據過去的投票紀錄，每個哈日族粉絲有 0.8 的機率把票投給日劇，有 0.2 的機率投給韓劇；每個哈韓族粉絲有 0.3 的機率把票投給日劇，有 0.7 的機率投給韓劇。請問本次投票「月薪嬌妻」勝出的機率是多少？(使用  $\Sigma$  符號表示答案即可)

得分
----