

# 國立成功大學 105 學年度 數學系 申請入學 試題

試題說明：

1. 本試題含九大題，總分 105 分，測驗時間 150 分鐘。
2. 請在每一試題所屬頁面作答，若使用試題背面，請標示清楚。

准考證號碼： \_\_\_\_\_

**You,** 姓名： \_\_\_\_\_ ,  
**could**  
**lead**  
**the next**  
**Mathematical**  
**revolution**

1

2

3

4

5

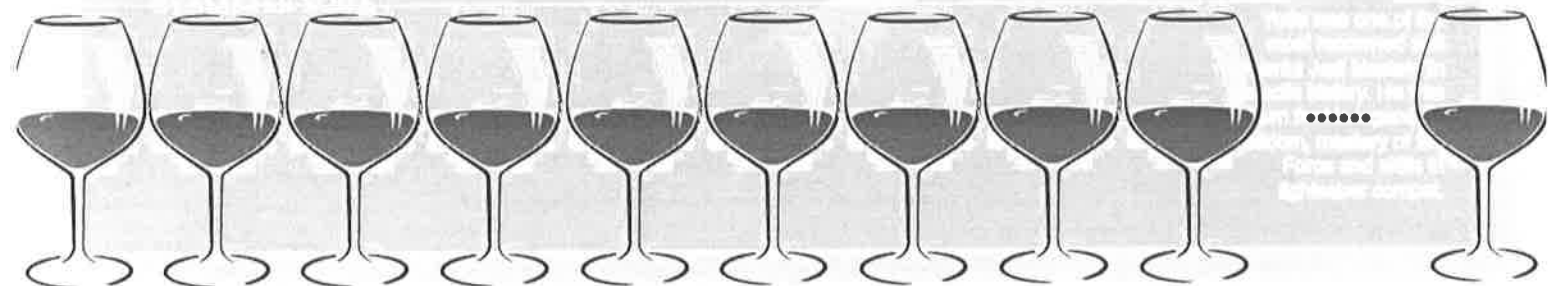
6

7

8

9

千



1. (10%) 對於所有的正整數  $n$ ，利用數學歸納法證明：

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. (5%) 令  $z$  為虛部非零的複數，如果  $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ ，求  $z^{689} + \frac{1}{z^{689}}$

(5%) 令  $z$  為虛部非零的複數，如果  $z + \frac{1}{z}$  是實數，證明： $\left| z + \frac{1}{z} \right| < 2$

3. 觀察不等式： $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

(5%) 對於所有的正整數  $m \geq 2$ ，證明： $1 + \frac{m}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^m}$

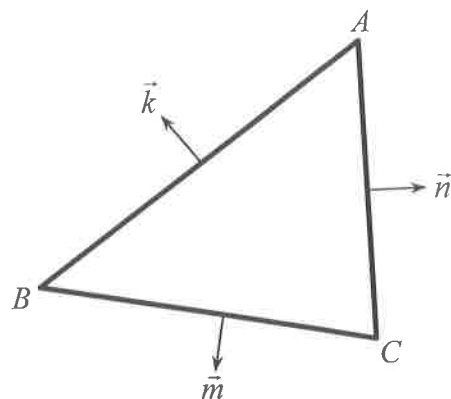
(10%) 已知『對於所有的正整數  $n \geq 2$ ，存在唯一正整數  $k$  使得  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ 』。請利用此結果證明：

$$1 + \frac{k}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + k$$

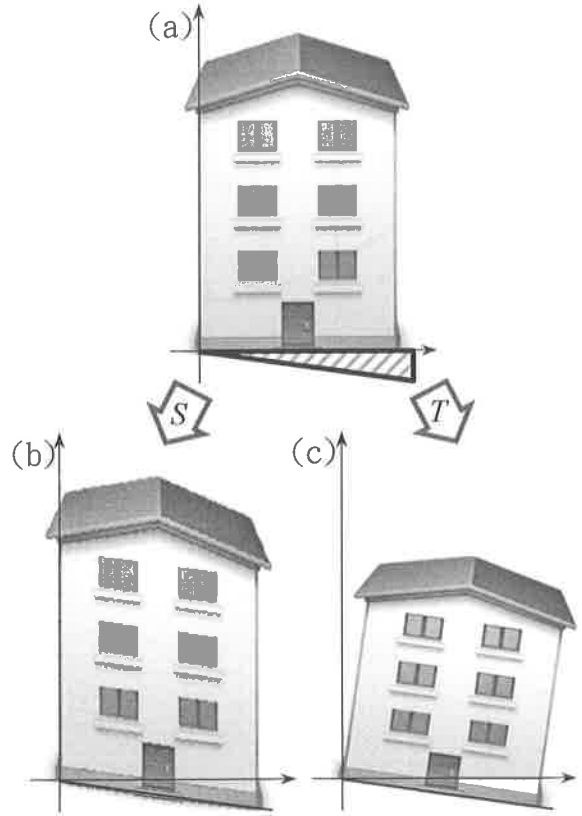
4. 三角形  $ABC$  中， $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$  的長度分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，垂直於  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$  且朝三角形外的單位向量分別為  $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 、 $\vec{k}$ 。

(a) (5%) 證明： $(a\vec{m} + b\vec{n} + c\vec{k}) \cdot \vec{m} = 0$

(b) (5%) 證明： $a\vec{m} + b\vec{n} + c\vec{k} = \vec{0}$



5. 如下圖(a)，一樓房蓋在坡度 1:7 的山丘上，樓房與斜坡間有地基支撐。今年初，南台灣發生大地震，樓房因為地基被掏空發生形變。請就下列兩種個別狀況回答問題。
- (5%) 如下圖(b)，樓房沿著山坡垂直推移，求變換矩陣  $S$ 。
- (5%) 如下圖(c)，樓房高度擠壓成原本的  $3/4$  且旋轉到山坡上，求變換矩陣  $T$ 。

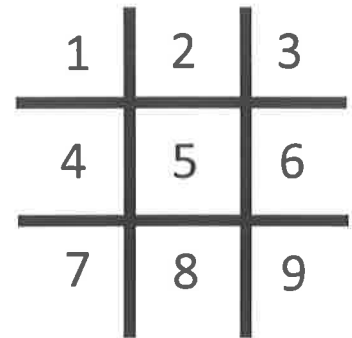


7. Alpha 狗跟 Beta 喵玩井字遊戲，就是輪流以 O 跟 X 下在 1 到 9 的位置。先連成直線三個、橫線三個或對角線三個就贏。例如一開始 Alpha 狗先下 1，Beta 喵後下 2；接著如果 Alpha 狗下 5，那麼 Beta 喵必須下 9，不然 Alpha 狗就獲勝；再接著如果 Alpha 狗下 4，那麼 Beta 喵不管下 6 或 7，Alpha 狗只要下另一個位置就獲勝。由上可知，如果一開始 Alpha 狗先下 1，Beta 喵後下 2，則 Alpha 狗有必勝策略。

(6%) 如果一開始 Alpha 狗先下 1，Beta 喵後下哪些位置，則 Alpha 狗有必勝策略？

(4%) 如果一開始 Alpha 狗先下 2，Beta 喵後下哪些位置，則 Alpha 狗有必勝策略？

(只猜答案不給分喵！)



8. (10%) 『謙卑謙卑再謙卑』，改變這七個字的順序排成一行。假設每一種排列出現的機率都一樣，則不出現任何『謙卑』一詞(例如『卑卑謙再卑謙謙』…等)的機率是多少？



9. 去年登革熱在台南大流行，登革熱病程的四種狀態依序為：未感期(susceptible)、潛伏期(exposed)、發病期(infectious)、康復期(recovered)。某社區前 18 天中四種狀態的人數資料如下，其中第  $n$  天的未感期、潛伏期、發病期、康復期人數分別以  $S_n$ 、 $E_n$ 、 $I_n$ 、 $R_n$  表示(假設此社區無人員流動，每個人只會被判定為一種狀態)。

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$S_n$	100	90	81	73	66	60	54	49	45	41	37	34	31	28	26	24	22	20
$E_n$	0	10	19	27	34	40	36	32	28	25	23	20	18	17	15	13	12	11
$I_n$	0	0	0	0	0	0	10	19	27	34	40	46	51	45	40	36	32	29
$R_n$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	19	27	34	40

假設健康從未感染登革熱的人群中，每天有比例  $r$  的人會被病媒蚊叮咬感染，過了一天就會進入潛伏期(被叮咬感染人數無條件捨去至整數)；此群潛伏患者過了  $P$  天會發燒就醫，確診為登革熱；而發病患者從就醫當天起，過了  $Q$  天就會康復出院，從此不會再得登革熱。

(3%) 觀察以上數據，得出被叮比例  $r$ 、潛伏天數  $P$ 、發病天數  $Q$  的數值。

(8%) 寫出此登革熱傳播的數學模型，即  $S_n$ 、 $E_n$ 、 $I_n$ 、 $R_n$  的遞迴式。

(4%) 預測第 20 天每個狀態的人數。

(0%) 這一題是真的零分。你覺得你的未來會由這個分數決定嗎？你覺得你的價值將由這張考卷衡量嗎？喜歡數學難道不能沒有理由？總有一天，你會走入沒有標準答案的生活中；愛不愛一個人，中午想跟哪個朋友吃飯，甚至什麼時候該笑，什麼時候想哭，都是未知數，也可能會是隨機變數。面對零分的問題，你的答案是？

Handwritten notes on a piece of paper:

数学  
算数のやり方

問題 次のおわり算をして、商とあまりを  
おとめなさい。

(1)  $500 \div 20$   
 $= 24$  (おわり) 7

(2)  $570 \div 50$   
 $= 8$  (おわり) 15

(3)  $500 \div 80$   
(4)  $550 \div 70$