

國立成功大學 104 學年度

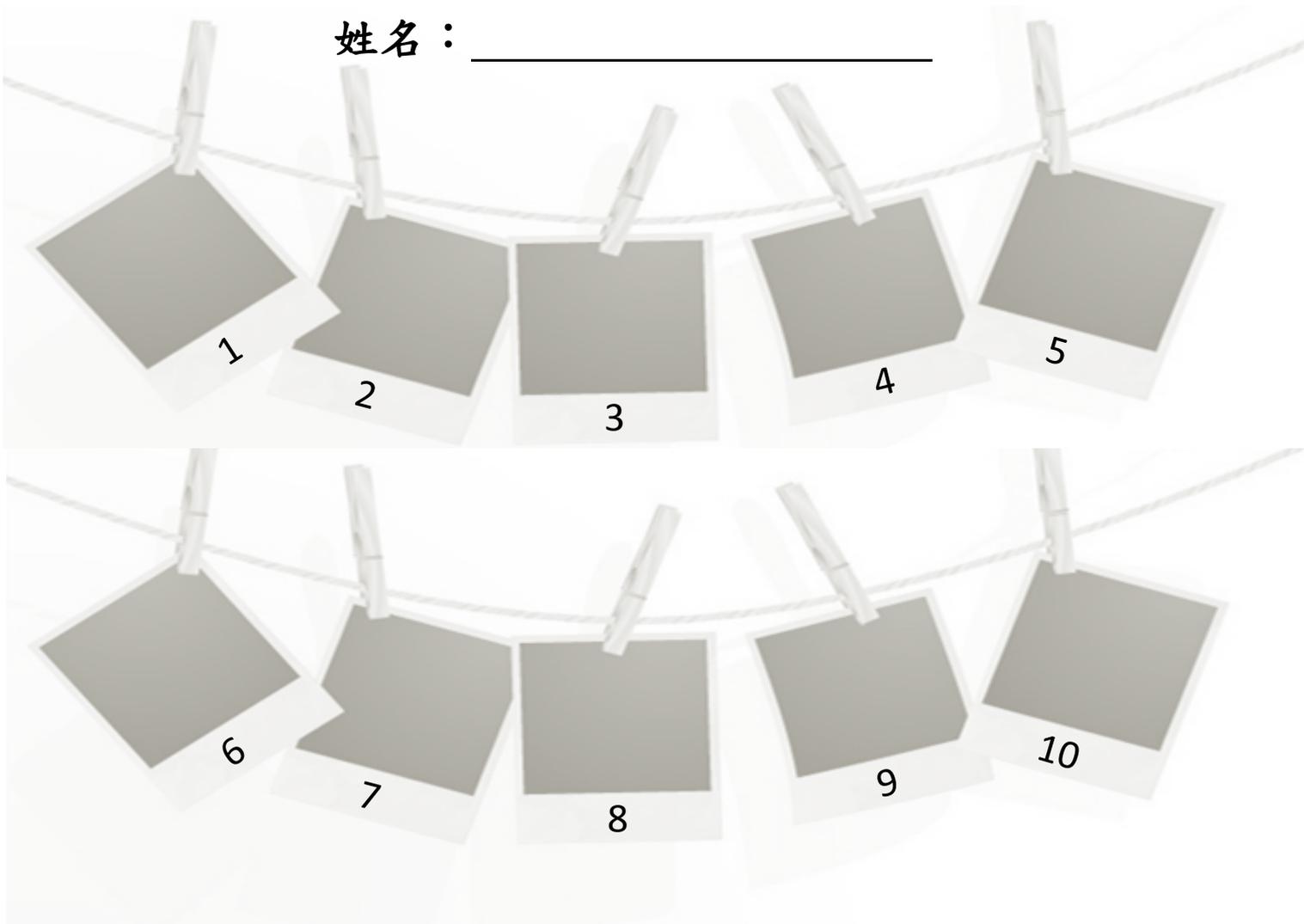
數學系 申請入學 試題

試題說明：

1. 本試題含十大題，總分 120 分。測驗時間：150 分鐘
2. 請在每一試題所屬頁面作答，若使用試題背面，請標示清楚。
3. 本考卷屬成大數學系機密，不得與本考卷合照打卡上傳 FB。

准考證號碼： _____

姓名： _____



1. (a) (4 分) 試說明 $f(x) = x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 5$ 沒有整係數一次因式。
- (b) (6 分) 試說明 $f(x) = x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 5$ 沒有整係數二次因式。

2. (a)(4 分) 令 $(1+x)^{11} = 1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{10}x^{10} + x^{11}$ ，試說明 b_1, b_2, \dots, b_{10} 都是 11 的倍數。

(b)(6 分) 試求 C_{25}^{104} 除以 11 的餘數。

提示： C_{25}^{104} 是 $(1+x)^{104}$ 的展開式中的某一項係數。

可改寫 $(1+x)^{104} = (1+x)^5[(1+x)^{11}]^9$ 並利用 (a) 小題。

3. (a) (4 分) $0.5 \leq 2^x \leq 2$ ，試求 x 的範圍。

(b) (6 分) 試畫出下列集合在平面直角座標中所描述的區域並計算其面積。

$$\{(\log_2 a, \log_2 b) \mid 0.5 \leq a \leq 2, a^2 \leq b \leq 2a\}$$

4. (10 分) 令 k 為正整數。

證明所有介於 2^k 與 2^{k+1} 之間的整數都可以寫成下列的二進位表示法

$$2^k + a_{k-1}2^{k-1} + \cdots + a_12 + a_0$$

其中 a_{k-1}, \dots, a_1, a_0 為 0 或 1，而且這樣的寫法只有一種可能。

提示：對 k 作數學歸納法並利用除法原理。

5. 令空間向量 $\vec{a} = (1, 4, 3)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, $\vec{c} = (3, 1, 1)$ 。

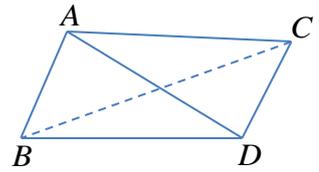
(a) (4 分) 試求 \vec{a} 在 包含原點且平行 \vec{b} 的直線 上的投影向量。

(b) (6 分) 試求 \vec{a} 在 包含原點、 \vec{b} 與 \vec{c} 的平面 上的投影向量。

6. 四面體 $ABCD$ 滿足 $\overline{AB} = \overline{CD} = 4$ 且 $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 8$ 。

(a) (7 分) 試求四面體的體積。

(b) (8 分) 平面 ABD 與平面 ACD 的夾角為 θ ，試求 $\cos \theta$ 。



7. 令圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ ，伸縮矩陣 $M = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ ，旋轉矩陣 $N = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 。

(a)(3分)令 $r = 3$ ，圓 C 經過 M 變換變成圓 C' ，試求圓 C' 的圓心與半徑。

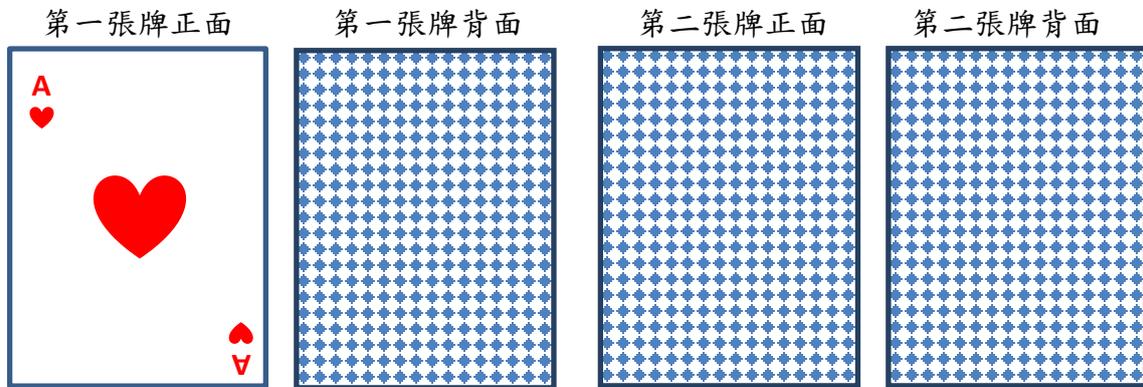
(b)(3分)令 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ，圓 C 經過 N 變換變成圓 C'' ，試求圓 C'' 的圓心與半徑。

(c)(9分)圓 C 經過矩陣 $P = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ 變換變成圓 $D: x^2 + y^2 - 2x - 6y + c = 0$ 。

試求矩陣 P 及 c 。提示：計算 MN 並與 P 比較。

8. 考慮三角函數 $y = f(x) = 2\cos(\pi x) + \cos(2\pi x)$ 。
- (a) (5 分) 找出函數 $f(x)$ 的最小週期 P 。
 - (b) (10 分) 找出函數 $f(x)$ 在 $0 \leq x \leq P$ 的極值點。
 - (c) (5 分) 若 α 為 $f(x) = 0$ 的根，試求 $\sin(\pi\alpha)$ 。

9. (5分) 這裡有兩張撲克牌，第一張牌是正常的，一面是 Ace，一面是牌的背面；而第二張牌因為印刷錯誤所以兩面都是背面。將這兩張牌置入一不透光的袋子中，抽出一張只看一面，如果此面是 Ace 就重抽，如果抽出來是「牌背花樣」就放在桌上，這時翻開另一面是 Ace 的話就算贏。請問在這樣的遊戲過程中，獲勝的機率是多少？不能只寫出答案，需要寫出理由及計算過程。



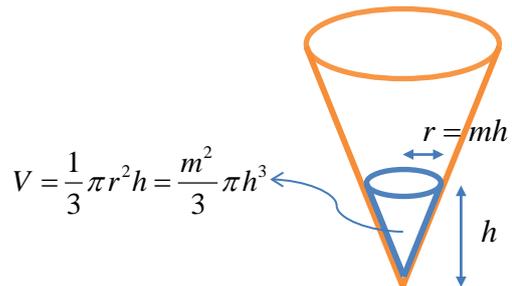
10. 來源：<http://www.appledaily.com.tw/realtimenews/article/new/20150323/579239/>

3/23 日的蘋果新聞中提到：「這波東北季風原本可望為石門水庫帶來些許雨量，但截至今上午 10 時止，累積降雨量仍為零，直至中午水庫才開始降雨，較大的雨勢讓民眾期盼能為水庫帶來進帳，雨勢雖然不小，但截至下午 3 時為止，累積雨量只有 9 毫米，可帶來 150 萬噸的進水量，可供應 2 天用水量，但雨勢持續降下，希望降雨量至少可以累積超過 20 毫米，讓進水量多增加 600 萬噸」。

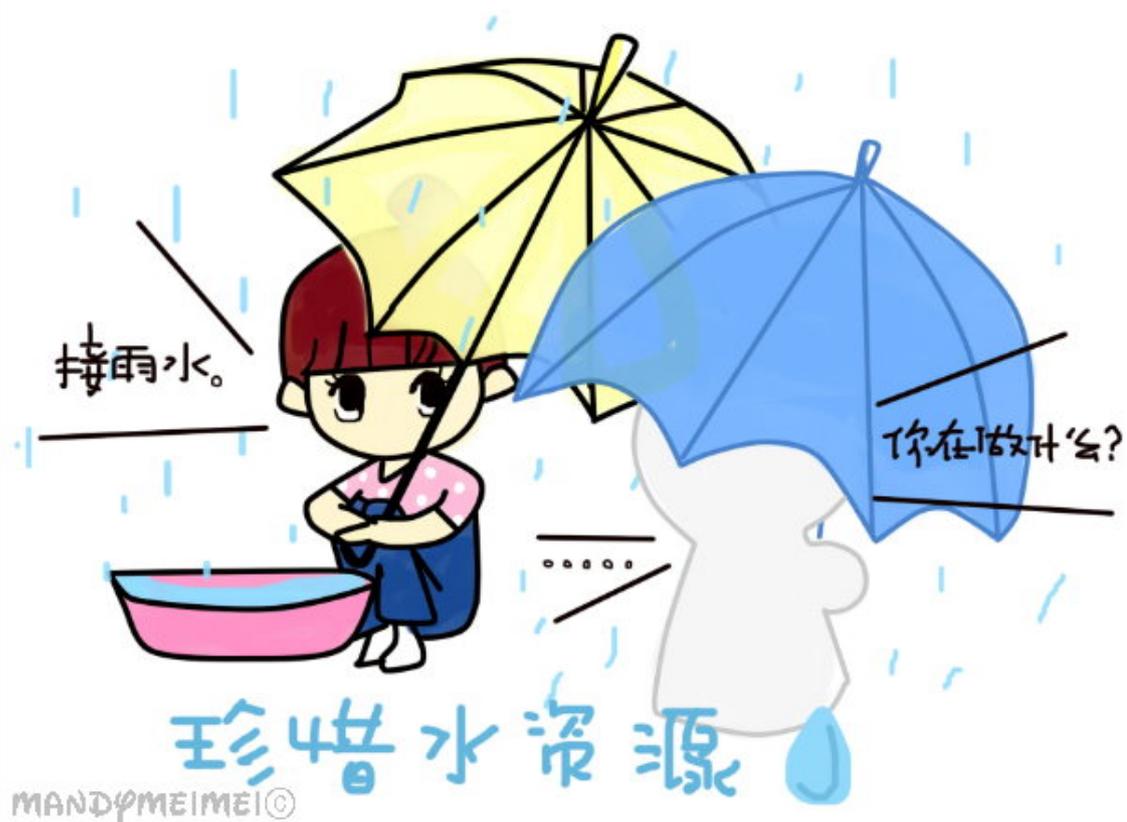


(a)(5 分) 內文中「**累積雨量 9 毫米可帶來 150 萬噸的進水量，而累積雨量 20 毫米進水量多增加 600 萬噸**」，請問上述引號中的文字有給你任何違和感(覺得奇怪的地方)嗎？如果有請描述。如果沒有，請給它一個合理的說明。

(b)(10 分) 參考下圖與公式，把水庫想像成一個直圓錐(當然水庫不會是直圓錐狀)，截至今上午 10 時水庫高度為 h ，雨勢過後，若累積雨量 10 毫米(代表水位上升 1 公分)將可帶來 150 萬噸的進水量，若累積雨量 20 毫米(代表水位上升 2 公分)可帶來 600 萬噸的進水量。請從上述條件求出 h 值。(圖中 m 為半徑 r 與高度 h 的比值)



這份考卷為多位老師嘔心瀝血之作。出題的時間絕對超過大家寫考卷的時間。因為我們希望除了考試之外，大家能夠關心國家，關懷社會，實乃生活中處處都有數學啊！



<http://mandymeimei.pixnet.net/blog/post/26948665>-夏季省水大作戰！節水 36 計