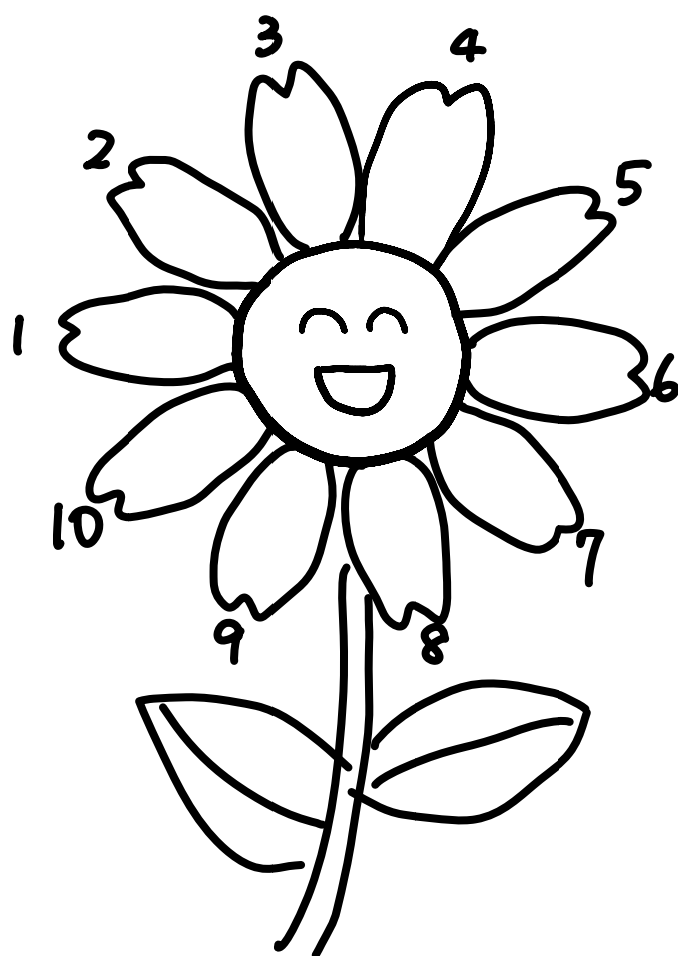


國立成功大學 103 學年度
數學系 申請入學 試題



准考證號碼：

姓 名：

1. 設 p 是質數， n 是正整數：

(a) (3 %) 試說明 p 整除 C_k^p ， k 是正整數且 $k < p$ 。

(b) (3 %) 證明 p 整除 $(n+1)^p - n^p - 1$ 。(提示：利用(a))

(c) (4 %) 證明 p 整除 $n^p - n$ 。(提示：利用(b)加上數學歸納法)

2. 考慮所有由 d 個變數 x_1, x_2, \dots, x_d 所構成 n 次單項式的集合：

$$A_n = \left\{ x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d} \mid m_1, m_2, \dots, m_d \text{ 都是非負整數且滿足 } \sum_{k=1}^d m_k = n \right\}。 \text{ 試計算：}$$

(a) (5 %) 集合 A_n 中的元素個數。

(b) (5 %) 集合 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 中的元素個數。

3. 一個物體在室溫 T_s 中隨著時間的溫度變化是 $T(t) = T_s + (T(0) - T_s)10^{kt}$ ，其中 $T(0)$ 為物體剛拿到這個室溫環境時的溫度， k 是常數， t 的單位是分鐘。現在有一瓶飲料從冰箱拿出來時是 5°C ，室溫是 20°C ，放了 25 分鐘後溫度是 10°C 。

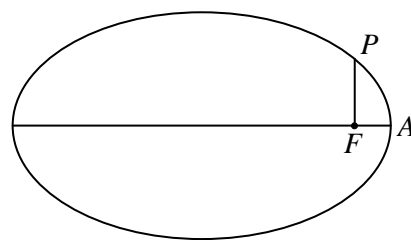
(a) (5%) 再過 25 分鐘後溫度會變成幾 $^\circ\text{C}$ ？

(b) (5%) 從冰箱拿出來至少幾分鐘後溫度會高於 15°C 。

($\log_{10} 2 \approx 0.3$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.48$)

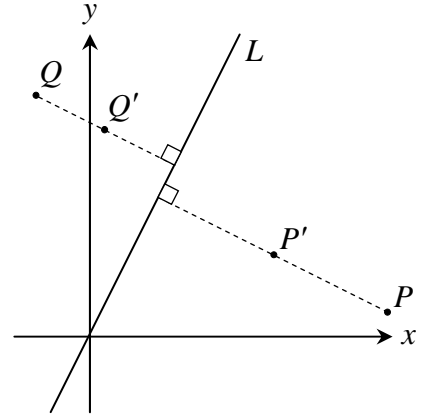
4. (10%) 下圖中 F 為橢圓焦點， A 為靠近 F 之長軸頂點， P 在橢圓上且 \overline{PF} 與長軸垂直。

證明： $\overline{AF} < \overline{PF} < 2\overline{AF}$ 。



5. (a) (4 %) 給定空間中一圓 $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 9, z = 0\}$ 與一點 $P = (4, 3, 2)$ ，試求 C 與 P 的最短距離。
- (b) (3 %) 若(a)小題中的 P 改成 (a, b, c) ，求圓 C 與 P 的最短距離。
- (c) (3 %) 考慮空間中所有與圓 C 的最短距離為 1 的點所形成的集合。試描述此集合的形狀為何？

6. (10%) 令 x - y 平面上直線 L 的方程式為 $y = 2x$ 。二階方陣 A 所對應的線性變換 $P' = AP$ ，是將點 P 到 L 的垂直距離縮小一半得到 P' 點。如下圖中所示， P 、 Q 兩點分別變換至 P' 及 Q' 。試求此二階方陣 A 。



7. (10 %)空間中三非零向量 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 滿足 $\angle AOB = 30^\circ$ ， $\angle BOC = 45^\circ$ 及 $\angle COA = 60^\circ$ 。

令 θ 為平面 AOB 與平面 BOC 的兩面角，試求 $|\cos \theta|$ 。

8. 甲乙兩人比賽桌球，採三戰兩勝制，每戰沒有平手。先拿到兩勝的人贏得比賽。已知甲乙兩人在正常情況之下實力相當(甲贏乙的機率是 0.5)。但若其中一人比另一人多勝一場時，下一場因為心理壓力減少，所以勝率會提高為 0.6 (另一個人的勝率降低為 0.4)
- (a) (5 %) 請問在這樣的情況之下，甲最後贏得比賽的機率是多少？
- (b) (5 %) 若最後甲贏得這場比賽，考慮之前所有賽事的可能性，第二場由甲勝出的機率是多少？

9. (10 %) 試求 $y = \frac{\cos x + 2\sin x}{2 + \cos x}$ 的最大值與最小值。(提示: 將等號右邊的分母乘到左邊, 整理出 $A\cos x + B\sin x = C$ 的形式)

10. (10 %) 設 $\omega_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ 。定義 n 階方陣 A_n ，它的每一個元素 $a_{k,\ell} = \omega_n^{(k-1)(\ell-1)}$ ；及 n 階方陣 B_n ，它的每一個元素 $b_{k,\ell} = \omega_n^{-(k-1)(\ell-1)}$

(a) (5 %) 請寫出 A_4 、 B_4 及這兩個矩陣的乘積 $A_4 B_4$ 。

(b) (5 %) 透過計算 $A_2 B_2$ 及 $A_3 B_3$ ，請試寫 $A_n B_n$ 並證明之。

考
題
到
此
結
束



天色漸漸光 遮有一陣人

為了守護咱的夢

成做更加勇敢的人

歡迎大家來 讀成大數學系

現在就是彼一工

換既做守護您的人

