

准考証號碼:

姓名:

說明: 共十大題, 十頁試題。並請寫完整的解答過程。背面也可作答, 但請將題號註明清楚。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- (5 分) 可以表示成 p/q (其中 p, q 為整數) 的數, 稱為有理數。試證明: 在三角形 ABC 中, 若 $\tan A, \tan B$ 是有理數, 則 $\tan C$ 必然也是有理數。
- (10 分) 令 2013^{2013} 除以 100 的商為 q , 餘數為 r . ($\log 2013 \doteq 3.3038$)
 - q 會是幾位數字?
 - r 是多少?

- (10 分) 解下列不等式。

$$(\log_{10} x - 1)(2^x - 16)(\cos^2 x + 2 \sin x + 2) < 0$$

- (10 分) 一數列 a_1, a_2, \dots 滿足 $a_1 = 0, a_2 = 1$ 及 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1$. 以數學歸納法證明: 對任意正整數 n , 點 (a_{2n-1}, a_{2n}) 必在曲線 $x^2 + xy - y^2 + 1 = 0$ 上; 點 (a_{2n}, a_{2n+1}) 必在曲線 $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ 上。

- (10 分) 試證明: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2}}$ 是無理數。

- (10 分) 一旋轉方陣 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 將直線 $4x + y = 5$ 變換到 $x + 3y = a$ ($a > 0$). 求 A 與 a .

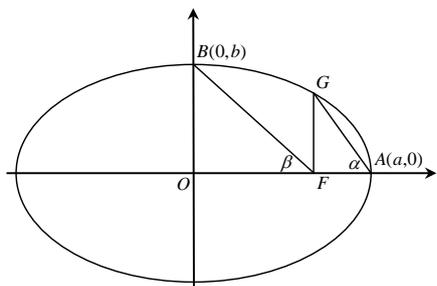
- (a) (5 分) 求 $\cos \theta + 2 \sin \theta$ 的極大值與極小值。

- (b) (10 分) 空間中給定一圓 C 與一直線 L

$$C: x^2 + y^2 = 1, z = 0. \quad L: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

試求 C 與 L 的最短距離。

- (10 分) 如圖, 在橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中, F 為焦點, FG 垂直於 x -軸。證明: $\tan \alpha = 1 + \cos \beta$.



9. (10 分) n 為正整數, 令 $a_n = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}$. 找出所有的 n , 使得 $(a_n - i)$ 為實數。

10. (10 分)

(a) 從 1 號到 10 號十張卡片, 隨機抽兩張, 兩張的差是 5 以上的機率是多少?

(b) 從 1 號到 $2n$ 號卡片中, 隨機抽兩張, 當 n 很大時, 兩張的差是 n 以上的機率, 會趨近?