

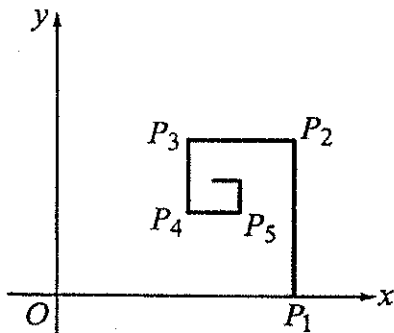
國立成功大學 100 學年度 數學系 申請入學數學科試題[共 10 頁/第 1 頁]

個人申請編號：

姓名：

說明：一、試題共 10 題(裝訂不得脫落)，每頁 1 題，作答在該頁次上，總分 185 分。
二、請寫完整的解答過程(禁止使用計算器)。

1. 如圖， $P_1(1,0)$, $P_2\left(1, \frac{2}{3}\right)$, \dots , 有 $\overline{P_n P_{n+1}} \perp \overline{P_{n+1} P_{n+2}}$ 且 $\overline{P_{n+1} P_{n+2}} = \frac{2}{3} \overline{P_n P_{n+1}}$ 之規律。



若 P_n 坐標為 (x_n, y_n) ,

- (a) (5分) 求 x_3, x_4, x_5, x_6 ,
 (b) (10分) 求 x_{2k-1} , 當 $k \geq 2$,
 (c) (5分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

國立成功大學 100 學年度 數學系 申請入學數學科試題[共 10 頁/第 2 頁]

2. (10分) 設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 是一整係數多項式，若 $f(x)$ 具有一次因式 $ax - b$ ，其中 a, b 是互質整數，證明 $a|a_n$ ，且 $b|a_0$ 。

國立成功大學 100 學年度 數學系 申請入學數學科試題[共 10 頁/第 3 頁]

3. 若 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ 為坐標平面上的三點，設 ΔABC 的面積為 Δ 。

(a) (10分) 先證明 $\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}$ 。

(b) (10分) 又證明 $\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$ 。

國立成功大學 100 學年度 數學系 申請入學數學科試題[共 10 頁/第 4 頁]

4. 設 ω 為 1 的 100 次方根，求下列各式的值：

(a) (10 分) $(1 - \omega)(1 - \omega^2) \cdots (1 - \omega^{99})$ 。

(b) (10 分) $\frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1-\omega^2} + \cdots + \frac{1}{1-\omega^{99}}$ 。

國立成功大學 100 學年度 數學系 申請入學數學科試題[共 10 頁/第 5 頁]

5. 小芸和小晉玩擲骰子遊戲，兩人從特製的三顆骰子中各選一個，然後各自擲骰子一次，點數高的獲勝。三顆骰子各面的點數如下：

A: 四面 2 點，兩面 6 點

B: 三面 1 點，三面 5 點

C: 六面都是 3 點

(a) (10 分) 假設小晉先選 A 骰子，小芸要選哪個骰子贏的機會較大？

(b) (10 分) 許多兩人遊戲都是先開始的人占些優勢，請問這個遊戲中，先選的人有占優勢嗎？

國立成功大學 100 學年度 數學系 申請入學數學科試題[共 10 頁/第 6 頁]

6. (15 分) 請描繪 $f(x) = \sin 2x + 7 \cos 2x$ 的圖形。 $f(x)$ 是個周期函數嗎？

國立成功大學 100 學年度 數學系 申請入學數學科試題[共 10 頁/第 7 頁]

7. (15 分) 在銳角三角形 ABC 中， $\angle A$ 的角平分線交 BC 於 L ，交 $\triangle ABC$ 的外接圓於 N 。自點 L 向 AB ， AC 引垂直線，垂足分別為 K ， M 。請證明四邊形 $AKNM$ 與 $\triangle ABC$ 面積相等。

8. 設有兩平面座標系統， (u,v) 和 (x,y) 。下面等式，把 uv 平面中的每一點對應到 xy 平面中的一點。

$$x = \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}}, y = \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}$$

- (a) (5 分) 證明在 xy 平面中每一點，都有 uv 平面中唯一一點對應到它。
(b) (5 分) 證明在 uv 平面中任意兩點的距離，和它們對應到 xy 平面中兩點的距離是相等。
(c) (5 分) 利用 uv 座標系統的圖形及兩座標系統間的對應關係，說明為何 $xy=1$ 是雙曲線。

9. 給定空間中三點 $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 。

- (a) (10 分) 試問直線

$$L: \frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{\frac{2}{3}}$$

是否通過 ΔPQR ? (請寫下計算過程及判別理由。若只回答“是”或“否”者不予計分)

- (b) (10 分) 試證明 ΔPQR 可以用下列參數式表示之

$$\Delta PQR = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1, \alpha + \beta + \gamma = 1 \right\}$$

10. 平面上一個圓，有 n 條平面直線通過其內部，每三條直線必定不會於圓內有共點。這 n 條直線在圓內部形成 p 個交點，並將圓切割成 r 個子區域。舉例來說，當 $n=1$ 時， p 必為 0，且 $r=2$ 。

- (a) (10 分) 求 $n=2,3,4$ 時所有可能的 p 和 r 值。
(b) (10 分) 透過上一小題的觀察，找出每當增加一條直線滿足上面條件時，新增圓內部交點數目 Δp 和新增子區域數目 Δr 的關係。
(c) (10 分) 找出 n, p, r 的關係和證明它是對的，當 $n \geq 1$ 。