

微積分 (一) 試題

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2 - \sqrt{x^2 + 3}}$

(2) 求 a, b 之值使得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{b-x}}{x} = 1$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \cos(x-1)$.

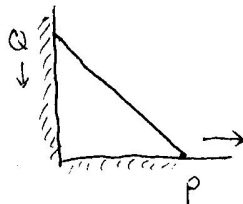
(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$.

(5) 設 c 為一實數, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定為 $g(x) = \begin{cases} x^2 - cx, & \text{若 } x \geq 2; \\ |2cx| + 1, & \text{若 } x < 2, \end{cases}$ 求 c 值使得 g 在 $\mathbb{R}$ 上連續.

(6) 設 $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$, 求 f 之值域.

(7) 設 y 為 x 的可微函數且滿足 $x^3 + y^3 = 3xy$. 求函數圖形上過點 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ 之切線方程式.

(8) 如圖3-6所示: 在牆角上鉛直放著 10 尺長的梯子, 若梯底 P 以每秒 1 尺的速度滑離牆壁, 問當 梯頂 Q 沿著牆壁下滑至離地面 5 尺時之下滑速度為何?



(9) (a) 敘述均值定理.

(b) 設 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 試證 $\forall x > 0$, 存在 $p \in [x, x+1]$ 使得 $f(\sqrt{x+1}) - f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{p}} f'(\sqrt{p})$.

(c) 設 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 可微且 $f'(x)$ 有界, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(\sqrt{x+1}) - f(\sqrt{x}))$ 之值.

(d) 計算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

(10) 繪製 $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 之圖形.

(含何處遞增或遞減, 臨界點, 圖形的凹凸性, 反曲點, 漸近線)