

化工微積分 (二) 試題

(1) 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定為 $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

(a) 證明 f 為一對一 (即對射);

(b) 若 $f^{-1}(a) = 2$, 求 a 及 $(f^{-1})'(a)$. (12分)

(2) 設 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. 試求定義域, 值域, 微分, 積分公式, 圖, 反函數及反函數的微分, 積分公式. (32分)

(3) 求 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(b) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{2+t}^2 e^{-x^2} dx$.

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{x^2 + n^2} dx$. (18分)

(4) 求 (a) $\int \sec x dx$.

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$.

(c) $\int \frac{dx}{2 + \sin x + \cos x}$.

(d) $\int \frac{(2x-1)e^{2x}}{x^2} dx$

(e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$.

(f) $\int \ln(\sin x) \cot x dx$. (48分)

(5) 化 $\frac{x^3 - 3x + 5}{(x+1)^2(x^2+2)}$ 成部分分式. (8分)

(6) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \ln \sqrt[n]{1 + \frac{i}{n}}$. (10分)

(7) 求函數 $f(x) = \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^x$ 圖形之水平漸近線方程式. (10分)