國立中山大學、國立成功大學合辦93學年度基礎學科
微積分競試試題與詳解

I. 多重選擇題[20%] (每一題有一個或一個以上正確的選項,全對才會給分)

1.[5%]以下哪些等式是正確的?

(A) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, 其中$x, y > 0$

(B) $\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$,其中$a > 0$

(C) $\int_a^b \cos 2x dx = \sin 2b - \sin 2a$

(D) $\int_0^1 e^{x^2} dx = \int_{-1}^0 e^{x^2} dx$

$Ans : (A), (B), (D)$

2.[5%]假設f和g是兩個定義在實數$\mathbb{R}$上可微分函數。如果$a < b$, 則以下哪些陳述是對的?

(A)如果所有的$x \in (a, b), f'(x) = g'(x)$ 成立,則對所有的$x \in (a, b), f(x) = g(x)$成立。

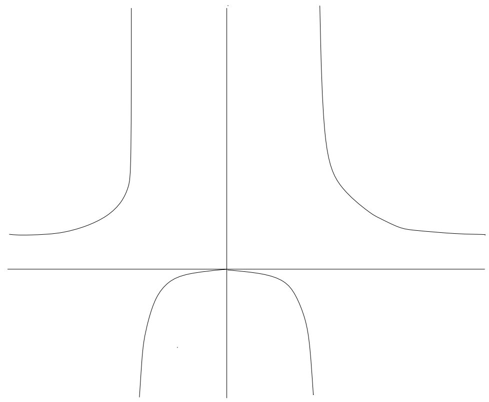
(B)如果所有的$x \in (a, b), \int_a^x f(t)dt = \int_a^x g(t)dt$ 成立,則對所有的$x \in (a, b), f(x) = g(x)$ 成立。

(C)如果所有的$x \in (a, b), f(x) = -g(x)$ 成立,則對所有的$x \in (a, b), f'(x) = -g'(x)$ 成立。

(D)如果所有的$x \in (a, b), f(x) = 1/g(x)$ 成立,則對所有的$x \in (a, b), f'(x) = 1/g'(x)$ 成立。

$Ans : (B), (C)$

3.[5%]假設$y=f(x)$的函數圖形如下



以下對$y=f'(x)$的函數的圖形描述哪些是正確的?

(A)圖形通過原點。

(B) 直線$y=0$是圖形的漸近線。

(C)函數$f^{'}(x)$在$x=0$附近是遞增的。

(D)圖形對稱於y軸。

$Ans:(A),(B)$

4.[5%]假設$f[a,b]\to\mathbb{R}$是一個連續函數。以下哪些關於$\int_a^b fdx$的近似積分陳述是對的?

(A)如果函數f在區間(a,b)是遞增的,則用梯形法($trapezoidal\ rule$)的近似值會比精確值大一些。

(B)如果函數f在區間(a,b)是凹向上的($concave\ upward$),則用梯形法($trapezoidal\ rule$)的近似值會比精確值大一些。

(C)如果函數f在區間(a,b)是凹向上的($concave\ upward$),則用Simpson法的近似值會比精確值大一些。

(D)如果f是一個二次多項式,則用Simpson法會得到精確值

$Ans:(B),(D)$

II.計算題[80%](須有計算過程)

1.[8%]求函數$f(x)$的微分:$f(x)=\frac{e^{x^2}}{\ln(3x^4+5)}$

$Ans:f^{'}(x)=\frac{\ln(3x^4+5)\cdot 2xe^{x^2}-e^{x^2}\cdot\frac{12x^3}{3x^4+5}}{[\ln(3x^4+5)]^2}$

2.[8%]若$f(3)=-4, f^{'}(3)=2, f^{''}(3)=5$,試求$\frac{d^2}{dx^2}f^2(x)|_{x=3}$

$$
\begin{aligned}
Ans: \tfrac{d^2}{dx^2}f^2(x) &= \tfrac{d}{dx}[\tfrac{d}{dx}f^2(x)] = \tfrac{d}{dx}[2f(x)\tfrac{d}{dx}f(x)] \\
&= [\tfrac{d}{dx}2f(x)]\tfrac{d}{dx}f(x) + 2f(x)\tfrac{d}{dx}(\tfrac{d}{dx}f(x)) \\
&= 2[\tfrac{d}{dx}f(x)]^2 + 2f(x)\tfrac{d^2}{dx^2} \\
&= 2[f^{'}(x)]^2 + 2f(x)f^{''}(x) \text{ (六分)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{則} \tfrac{d^2}{dx^2}f^2(3)|_{x=3} &= 2[f'(3)]^2 + 2f(3)f^{''}(3) \\
&= 2\cdot 2^2 + 2\cdot(-4)\cdot 5 \quad (\because f(3)=-4, f^{'}(3)=2, f^{''}(3)=5) \\
&= 8-40=-32 \text{ (兩分)}
\end{aligned}
$$

3.[8%]已知$\sqrt[3]{20}\approx 2.7144$,求$\sqrt[3]{20.003}$的近似值

$Ans:$ 令$y=\sqrt[3]{20}$, 則$\Delta y=\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}$

$$dy = y^{'}\Delta x = \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x \text{ (四分)}$$

若$\Delta x\approx 0$,則$\Delta y\approx dy$

$\therefore \sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}\approx \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x$

$\therefore \sqrt[3]{x+\Delta x}\approx \sqrt[3]{x}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x=\sqrt[3]{x}(1+\frac{\Delta x}{3x})$ (兩分)

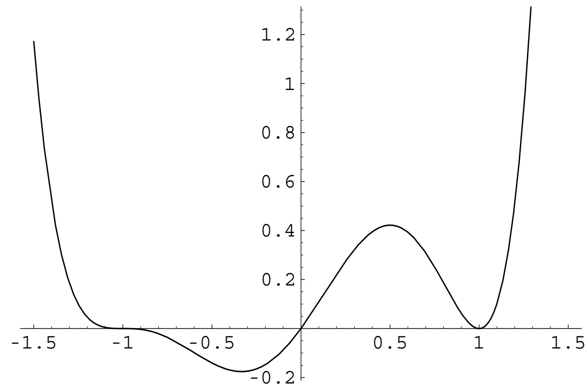
在其中設$x=20, \Delta x=0.003$, 得

$$\sqrt[3]{20.003}\approx 2.7144\times(1+\tfrac{0.003}{3\times 20})\approx 2.7145 \text{ (兩分)}$$

4.[8%]求函數$f(x)=\int_0^x t(t-1)^2(t+1)^3dt$ 的局部極大值與局部極小值

$Ans:\ f'(x)=x(x-1)^2(x+1)^3$

x		-1		0		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	反曲點	$\nearrow$



極大值(兩分)

$$\begin{aligned}f(-1)&=\int_0^{-1} t(t-1)^2(t+1)^3dt\\&=\int_0^{-1}(t^6+t^5-2t^4-2t^3+t^2+t)dt\\&=\left[\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}-\frac{2}{5}t^5-\frac{t^4}{2}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_0^{-1}\\&=-\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\\&=\frac{-30+35+84-70}{210}=\frac{19}{210}\end{aligned}$$

極小值(兩分)

$$f(0)=\int_0^0 t(t-1)^2(t+1)^3dt=0$$

5.求不定積分

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$$

Ans :設

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

通分後應有

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2) \text{ (四分)}$$

在這恆等式中,

令$x=-1$, 得$-1=2A, A=-\frac{1}{2}$;
令$x=-2$, 得$-2=-B, B=2$;
令$x=-3$, 得$-3=2C, C=-\frac{3}{2}$;(兩分)

於是

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx \\
&= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+3} \right) dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right| + C \text{ (兩分)}
\end{aligned}$$

6.[8%]設a, b, c 為實數. 試証明函數$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 沒有(局部)極值的充分必要條件是$a^2 \leqslant 3b$

$Ans: p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 是一個到處都可以微分的函數

如果$p(x)$ 有極值, 則$p'(x) = 0$ 有解

也就是$3x^2 + 2ax + b = 0$ 有解

也就是$4a^2 - 12b \geqslant 0$

$$a^2 - 3b \geqslant 0$$

但是如果$a^2 - 3b = 0$, 則 $p'(x)$ 在*critical point* 並未變號, 所以此*critical point* 並非真正的極值,

反過來說,如果$a^2 - 3b > 0$, 則$p'(x)$ 在*critical point* 有變號, 因此在這兩個*critical points* 都會產生極值.

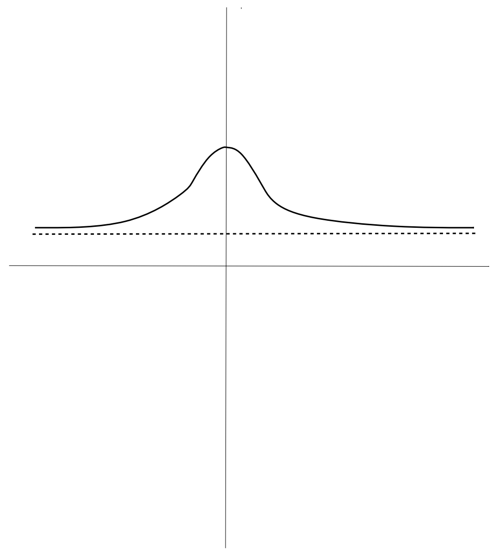
7.[8%]在座標平面上畫出滿足以下條件的二階可微分函數 f 的圖形:

$f''(x) > 0$ 當$|x| > 2$; $f''(x) < 0$ 當$|x| < 2$;

$f'(0) = 0$; $f'(x) > 0$ 當$x < 0$; $f'(x) < 0$ 當$x > 0$;

$f(0) = 4; f(2) = 2; f(x) > 0$ 對所有的x; 且f 是偶函數($even\ function$)

Ans :



8.[8%]利用函數$\frac{e^x-1}{x}$ 的泰勒展開式去求出無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 的值

Ans : $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\frac{e^x-1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$

兩邊微分

$\frac{x \cdot e^x-(e^x-1)}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{(n+1)!}$

令$x = 1$

$\frac{1e^1-(e^1-1)}{1^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$

所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$

9.[8%]求在座標平面上被曲線: $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=-2,\ x=1$ 所圍住的區域面積

$Ans:$ 斜線面積 $=\int_{-2}^{0}(e^{-x}-e^x)dx+\int_0^1(e^x-e^{-x})dx$

$=[-e^x-e^x]_{-2}^{0}+[e^x+e^{-x}]_0^1$

$=(-e^0-e^0)-(-e^2-e^{-2})+(e^1+e^{-1})-(e^0+e^{-0})$

$=e^2+e^1+e^{-1}+e^{-2}-4$

10.計算曲線長度:

$$\begin{cases} x(t)=\cos t+t\sin t \\ y(t)=\sin t-t\cos t \end{cases}$$

其中$0\le t\le \pi$

$Ans:\ x^{'}(t)=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$

$y^{'}(t)=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$

$(x^{'}(t))^2+(y^{'}(t))^2=t^2$

曲線長度$=\int_0^{\pi}\sqrt{(x^{'}(t))^2+(y^{'}(t))^2}dt$

$=\int_0^{\pi}tdt=\frac{t^2}{2}]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$