國立功大學92學年度基礎學科(微積分)解答

1. 求 $\lim_{x\to 0}\ln(1+x\sin\frac{1}{x})$. (8分)

解：因 $0\le |x\sin\frac{1}{x}|\le |x|$, 且 $\lim_{x\to 0}|x|=0$

由擠壓原理得知 $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

於是由ln之連續性得

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x\sin\frac{1}{x})=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x\sin\frac{1}{x})\right)=\ln 1=0$$

2. 求 $\lim_{x\to 1}\frac{\int_x^1\sqrt[3]{t-1}\cos t\,dt}{(x-1)^2}$. (9分)

解：由微積分基本定理知 $\lim_{x\to 1}\int_x^1\sqrt[3]{t-1}\cos t\,dt=\int_1^1\sqrt[3]{t-1}\cos t\,dt=0$

故 $\lim_{x\to 1}\frac{\int_x^1\sqrt[3]{t-1}\cos t\,dt}{(x-1)^2}$ 為 $\frac{0}{0}$ 型不定式

因

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}\int_x^1\sqrt[3]{t-1}\cos t\,dt}{\frac{d}{dx}(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{-\sqrt[3]{x-1}\cos x}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-\cos x}{2(x-1)^{\frac{2}{3}}}=-\infty$$

故由l'Hospital法則知

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_x^1\sqrt[3]{t-1}\cos t\,dt}{(x-1)^2}=-\infty$$

3. 設可微分函數 f 滿足 $f(\tan x)=x,\ \forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 求 $f'(1)$. (9分)

解：由chain rule得 $f'(\tan x)\cdot\sec^2 x=1\quad\forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

令 $x=\frac{\pi}{4}$, 得 $f'(\tan\frac{\pi}{4})\cdot\sec^2\frac{\pi}{4}=1$, 即 $f'(1)\cdot 2=1$, $\therefore f'(1)=\frac{1}{2}$.

4. 令函數 $g(x)=\frac{8x}{(x+2)^2}:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, 求 g 的臨界點, g 在何處為遞增?
何處為遞減? 並問 g 的反曲點, g 何處為凹向上? 何處為凹向下? 繪出 g 之圖形. (15分)

解：$g(x)=\frac{8x}{(x+2)^2}:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$

$g'(x)=\frac{-8(x-2)}{(x+2)^3}\overset{\text{令}}{=}0$, 得 $x=2$ ($x=-2$ 不在定義域內, 故不為臨界點)

$\therefore$ 臨界點為 $x=2$

x		-2		2	
$g'(x)$	$-$		$+$		$-$
$g(x)$	↘		↗		↘

$\therefore$ g 在 $(-\infty,-2)$ 為↘

在 $(-2,2]$ 為↗

在 $[2,+\infty)$ 為↘

$g''(x) = \dfrac{16(x-4)}{(x+2)^4} \overset{\text{令}}{=\!=} 0$ 得 $x = 4$

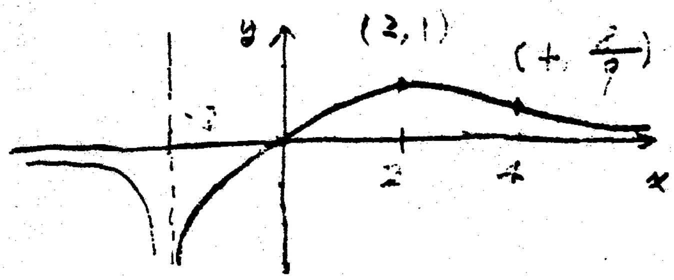
x		-2		4	
$g''(x)$	$-$		$-$		$+$
$g(x)$	$\cap$		$\cap$		$\cup$

$\therefore$ g 在 $(4, \frac{8}{9})$ 爲反曲點

在 $(-\infty, -2), (-2, 4)$ 爲 $\cap$

在 $(4, +\infty)$ 爲 $\cup$

g 的圖形：



5. 設 $h(x) = x^5 + 2x^3 + x, x \in \mathbb{R}$，求其反函數之圖形在點 $(4,1)$ 之切線方程式. (9分)

解：$h'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

由 $h(1) = 4$，得 $h^{-1}(4) = 1$，因此由反函數微分定理得

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5+6+1} = \frac{1}{12}$$

$\therefore$ 在反函數圖形在點 $(4,1)$ 的切線方程式爲

$$y - 1 = \frac{1}{12}(x-4)$$

6. 證明：$\forall x > 0, \ \ln(\frac{1}{2}x^2 + x + 1) < x.$ (10分)

解：令 $f(x) = x - \ln(\frac{1}{2}x^2 + x + 1), \forall x \geq 0$，則 $f(0) = 0 - \ln 1 = 0.$

又 $f'(x) = 1 - \dfrac{x+1}{\frac{1}{2}x^2 + x + 1} = \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2 + x + 1} > 0, \quad \forall x > 0$

得 f 在 $[0, +\infty)$ 爲嚴格遞增函數，$\therefore \forall x > 0, f(x) > f(0) = 0$

即證 $x > \ln(\frac{1}{2}x^2 + x + 1), \forall x > 0.$

[另解]：$\forall x > 0$，令 $f(t) = t - \ln(\frac{1}{2}t^2 + t + 1), \forall t \in [0, x]$

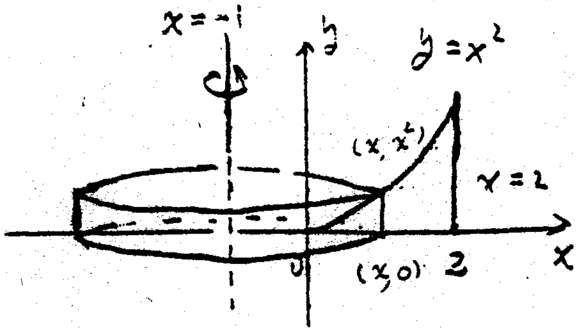
由均值定理知 $\exists p \in (0, x)$，使得 $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(p)$

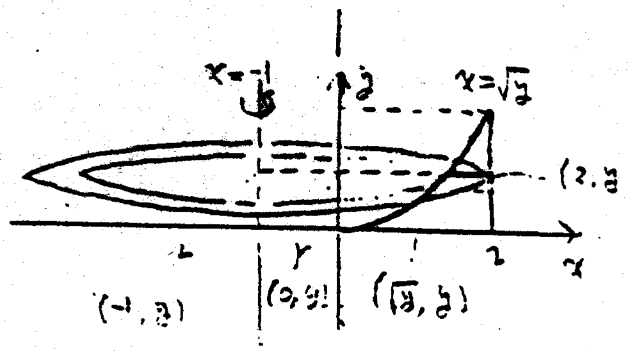
又 $f(0) = 0 - \ln 1 = 0, \quad f'(p) = \dfrac{\frac{1}{2}p^2}{\frac{1}{2}p^2 + p + 1} > 0$

$\therefore f(x) = x \cdot f'(p) > 0$ 即 $x > \ln(\frac{1}{2}x^2 + x + 1), \forall x > 0$

7. 令R是由$y = x^2, y = 0$與$x = 2$所圍成之平面區域,求R繞直線$x = -1$迴轉一圈所得之立體體積. (10分)

解





殼法：

$$V = \int_0^2 2\pi(x+1)x^2\,dx$$
$$= 2\pi\int_0^2 (x^3 + x^2)\,dx$$
$$= 2\pi\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2$$
$$= \frac{40\pi}{3}$$

或(切線法:)

$$V = \int_0^4 \pi(3^2 - (\sqrt{y}+1)^2)dy$$
$$= \pi\int_0^4 8 - y - 2\sqrt{y}\,dy$$
$$= \pi\left(8y - \frac{y^2}{2} - \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^4$$
$$= \frac{40\pi}{3}$$

8. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+2nk}$. (10分)

解：

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+2nk} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+2k}\cdot\frac{1}{n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{2k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{1+2x}\,dx$$

$\left(可取 a = 0,\ b = 1,\ f(x) = \frac{x}{1+2x}\right)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 1 - \frac{1}{1+2x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\ln(1+2x)\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\ln 3\right)$$

9. 求 $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx.$ (10分)

解：$\int_0^1 x^3 e^x \, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 x e^{x^2} \, dx$

$$\left(\begin{cases} u = x^2 \\ dv = xe^{x^2} \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x \, dx \\ v = \frac{1}{2}e^{x^2} \end{cases}\right)$$

$$= \frac{e}{2} - (\frac{1}{2}e^{x^2})\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

10. 求 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+3} dx.$ (10分)

解：令 $u = \sqrt{x-1}$, $u^2 = x - 1$, $dx = 2u \, du$

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+3} \, dx = \int \frac{u}{u^2+4} \cdot 2u \, du$$

$$= \int 2 - \frac{8}{u^2+4} \, du$$

$$= 2u - 8 \cdot \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{u}{2} + C$$

$$= 2\sqrt{x-1} - 4 \tan^{-1} \frac{\sqrt{x-1}}{2} + C$$