國立中山大學 國立成功大學 合辦 91 學年度基礎學科(微積分)競試試題

92 年 5 月 10 日 (星期六) 上午 10:10~11:50

1. 求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$.

2. 試求 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\cos^2 x+3\cos x+2}\,dx$.

3. 求 a, b 之值，使得 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{ax+b}-2}{x-1}=1$.

4. 討論 $f(x)=x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ 之遞增、遞減及凹凸情形並繪製 f 之圖形 .

5. 設 $f(x)=\begin{cases} x+x^2\cos\dfrac{1}{x}, & 若\ x\neq 0, \\ 0, & 若\ x=0, \end{cases}$ 試求 $f'(x)$.

6. 考慮由曲線 $y=\sqrt{x}$，直線 $y=2$ 及 $x=0$ 所圍成之區域，計算此區域對直線 $x=4$ 旋轉所圍之體積 .

7. 假設 $a<b$，證明不等式 $e^a(b-a)<e^b-e^a<e^b(b-a)$ 成立 .

8. 設 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 為連續，$g(1)=2$, $g(2)=-1$, $\displaystyle\int_1^2 g(t)\,dt=3$ 且 $F(x)=\displaystyle\int_{x^3}^2 g(xt)\,dt$ 對所有 $x\in\mathbb{R}$. 試求 $F'(1)$.

9. 設 f 在 $[0,\infty)$ 上可微分，$f(0)=0$ 且 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 對所有 $x>0$.
證明：若 f' 在 $[0,\infty)$ 上為遞增函數，則 g 在 $(0,\infty)$ 上也為遞增函數 .

10. 假設 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 為二階可微分之函數且 $|f''(x)|\leq K$, $K>0$. 如果 $f(x)$ 有極大值於 $(0,1)$，試證明 $|f'(0)|+|f'(1)|\leq K$.