

# 國立成功大學 88 學年微積分實力測驗試題

2000 年 4 月 15 日 上午 9:10~10:50

注意：1. 本試卷共分五大題，務必依序在試卷之五小頁上作答。  
2. 禁止使用計算機。

1. (a) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}} \right]$ . (10%)

(b) 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^{3x} \frac{\sin 2t}{t} dt$ . (10%)

2. 設  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{若 } x \neq 0. \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$

(a) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  與  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (4%)

(b) 求  $f'(x)$  與  $f''(x)$ . (10%)

(c) 試討論  $f$  之增減及凹凸並繪製  $f$  之圖形. (10%)

3. 設  $A, B$  兩飛機在同一高度作水平飛行. 若  $B$  機位於  $A$  機西南方 200 公里處,  $A$  機以每分鐘 40 公里之速度朝南飛行,  $B$  機以每分鐘 20 公里之速度朝東飛行, 問何時它們的距離最小? 其最小距離是多少? (16%)

4. 令  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$ .

(a) 求  $R$  對直線  $y = 1$  迴轉所得之迴轉體體積. (8%)

(b) 求  $R$  對  $y$  軸迴轉所得之迴轉體體積. (8%)

(c) 求  $R$  對  $x$  軸迴轉所得之迴轉體之表面積. (8%)

5. 設  $a < b$  且  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上可微.

(a) 令  $\alpha(t) = \begin{cases} a, & \text{若 } a \leq t \leq \frac{a+b}{2}, \\ 2t-b, & \text{若 } \frac{a+b}{2} < t \leq b, \end{cases} \beta(t) = \begin{cases} 2t-a, & \text{若 } a \leq t \leq \frac{a+b}{2}, \\ b, & \text{若 } \frac{a+b}{2} < t \leq b, \end{cases}$

且  $g(t) = \begin{cases} A, & \text{若 } t = a, \\ \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}, & \text{若 } a < t < b, \\ B, & \text{若 } t = b, \end{cases}$

已知  $g$  在  $[a, b]$  上連續, 求  $A$  與  $B$ . (8%)

(b) 試證: 若  $f'(a) < y_0 < f'(b)$ , 則存在  $x_0 \in [a, b]$  滿足  $f'(x_0) = y_0$ . (8%)