

# 國立成功大學 83 學年微積分實力測驗試題

1995.4.22.

1. (a) 設  $c$  為一實數，函數  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  為

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - cx, & \text{若 } x \geq 2, \\ |2cx| + 1, & \text{若 } x < 2, \end{cases}$$

求  $c$  值使得  $g$  為連續函數。

- (b) 試求下列極限：

$$(i) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{|x-4|}{x-4}; \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}; \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1) \cosh(x^2)}{x^2}.$$

2. (a) 設  $y = f(x) = x^5 + 7x^3 + x - 10$ ,

(i) 證明  $f(x)$  為遞增函數； (ii) 求  $f(x)$  的反函數在  $y = -1$  時的導數。

- (b) 試求導數  $\frac{dy}{dx}$ .

$$(i) y = \frac{3 \sinh(x^2 + 2)}{\sqrt{x^2 + 5x + 1}}; \quad (ii) \cos(xy) = y^2 + 2x;$$

$$(iii) y = \int_0^{x^2} \cos(t^2) e^{-t^2} dt.$$

3. 試求下列各積分值：

$$(a) \int_0^2 x^5 e^{-x^3} dx; \quad (b) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}; \quad (c) \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{d}{du} [\sin u \cos u^2] du.$$

4. 某曲線之參數方程式定義如下：

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t, \\ y(t) = 1 - \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

(a) 求  $t = \frac{\pi}{4}$  時，該曲線之切線斜率。

(b) 求該曲線之長。

(c) 曲線在  $XY$  平面上與  $X$  軸所夾之區域面積為何？

5. 設  $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  為一正值的連續函數，且已知  $f'(x) = x^2(x+4)$ ， $-10 < x < 10$ 。試求函數  $f$  (i) 遞增、遞減的範圍，(ii) 凹向的情形，(iii) 局部(相對)極值的點，(iv) 反曲點，(v) 綜合(i)~(iv)的資料繪出函數圖形的走勢，(即圖形的變化狀況)。