

六、再談大學數學教育—張聖容院士

受訪人：美國 Princeton 大學數學系張聖容教授 (簡稱：聖容)

訪談人：國立台灣大學數學系張鎮華教授 (簡稱：鎮華)

國立交通大學應用數學系許元春教授 (簡稱：許)

訪談日期：2013 年 2 月 20 日 (星期三)

聖容：我在 UCLA 教過 18 年書，在 Princeton 也差不多有 12 年的教學，這兩所大學各有不同的特色。因為我只在 Princeton 做過系主任，我只講在 Princeton 的經驗。在 Princeton 學生進來是不分系的，到大二下學期、大三、大四才決定主修(major)。大部分學生進來的時候已經先大致想過未來要在文學院或是理學院，除此之外是沒有決定的。學生在大一、大二選課的時候，也會考慮將來的主修要求。

我們教育的原則是通才教育，這是學校的一個基本原則。就是說大學生的教育一定要全面性，所有理工科的學生一定要學很多人文課，所有人文科的學生也要學很多理工課。比如說大一和大二的學生每一學期選四門課，即使將來準備念理工科，最多只有兩門是理工科的課，其他兩門一定是人文方面的課。因為我們學校規定每個人都要選數學，所以我們系開的課有兩種，一個是針對主修數學學生開的課，一個是我們的服務性課程 (service course)。像給工學院、生物系還有給人文科學開的課都叫做服務性課程。我們大一、大二有很多服務性課程，到大三、大四以後就都是開給主修數學的學生修的課。開服務性課程的時候，我們把學生大致分成三類。第一類是學生很明顯將來是學數學跟物理的，通常這類學生很少。第二類是理工科的，有可能將來讀工、數學或是生物。第三類是要讀文科的。其實我們針對第三類開的服務性課程，通常非常非常受歡迎，在學校是供不應求的。而且我們開給主修人文的課通常是系裡最好的教授，學問最廣，年輕。像我們系裡的一個明星教員叫 **Manjul Bhargava**—是教數論的，這位教授現在只有 35、36 歲，學問非常廣，口才非常好，他常常開大一新生課。他開的課叫做 magic number，是數論裡面的 magic number。可是他這個 magic number 主要是介紹數字與語言學、數字與音樂的關係，並且他要學生做實驗—配合音律跟數論之間，還有 computer 教育。所以每年很多學生要選這個課。通常 Princeton 很少大班教學，小班一班通常 25 人，可是他那班限制 100 人。因為需要電腦教學，我們供應他 4 個助教。像這種課表面上跟我們數學系是無關的(因為這些學生將來多半不是主修數學)，可是我們覺得這樣的課對我們非常重要，尤其是學文科的人，可能一輩子就只選過幾門數學課，他們對數學的觀念就只靠這兩三門課。我們覺得這是我們系對大眾的一個命脈，也是我們數學系在全校形象非常重要的課。開給人文學生修的服務性課程我們每年都要開兩、三門，系裡投入大量的配合資源。**Manjul Bhargava** 要求 4 個助教，我們就給他 4 個助教，他還要求一個教員跟他一起編材料，我們也配合。所以這門課我們已經花了 2 個教員，4 個助理，這樣的課我們支持。

現在我們主修數學的學生大概每一年有 40-50 位，我們系全部大概有 100 個學生。

鎮華：微積分是服務性課程嗎？

聖容：微積分是大一和大二的課，算是服務性課程。我們那邊的制度跟別人不一樣，因為我們

是私立學校，學生繳交很貴的學費，學生是很嚴格的被選進來。所以我們的班都是小班。我們的 Calculus 一班不超過 25 人，都是小班教學。服務性課程除了微積分以外也教淺近的 ODE，還有淺近的數論。還有一種是跟物理系合開的 Calculus，他們教一半，我們教一半。是從應用角度出發，可是比一般 Calculus 高一等。

給主修數學學生的課就開很多。我們系傳統上所有的教授都要教大學部課程。我們以前是 2/2，一年教 4 門課，兩門大學部課程，兩門研究所的課。最近我做系主任才把它換成 2/1，可是大家都有一個公約，一定是 50% 是大學部課程，50% 是研究所課程。即使是很大牌的老師也是這樣，所有人都一樣。平均來講，你可以今年教兩門大學部的課，一門研究所的課，明年就要反過來。就是說你兩年下來平均一定是 50% / 50%。所以我們大學部開了很多數學課。像我們有四門分析系列課(Fourier Analysis、Complex Analysis、Real Analysis, Functional Analysis)。我們還有數論系列的課。我們有一些課我們叫 bridge course。bridge course 是大四的學生跟研究生一年級的學生都可以選的基礎課。通常上學期教大學水平的內容，下學期教一點點研究所的內容。大四好的學生就可以選這樣的課。所以我們有很好的學生，通常這些學生我們還要求他們做論文。

早年我們收研究生的時候，東南亞或外國學生比美國學生好很多。但是現在情況不大相同。因為最近幾年美國的學校，像是哈佛、密西根這些頂尖的學校，有一部份的學生大四要寫論文(senior thesis)。是老師一對一個別指導的。有的人偏向讀文章(或書)，有的人做新的題目。學生在申請研究所的時候，會有老師寫信，並且講述他的研究。所以現在我們的檔案裏面最強的學生逐漸變成美國學生。因為東方學生，像是北大或是台灣來的都是選了很多課，除非已經唸過碩士，否則沒有什麼研究的成績。反而是美國畢業的學生有專家評論，有的論文做得很出色，有很頂尖的學生爬得很快。所以最近幾年我們有越來越多的美國學生，東方學生反而失去競爭力。

鎮華：論文課程(senior thesis)是必修還是選修？

聖容：選修的。通常要讀研究所的人才會選。對學生來講，他們也是想知道他們適不適合做研究。通常我們在大三學期完的暑假，系裡有特別的獎學金提供學生兩個月的生活費，將來要選論文的學生就願意暑假留在學校讀書，到大四就可以開始做論文。

鎮華：臺灣的工學院，長久以來就把這個課當作必修。幾年前我當系主任的時候，我就開了這個課，但是我不敢像工學院那樣，把它變成必修。學生來修的不是那麼踴躍，可能他們沒有一些動機說做了會有什麼好的回饋，像你剛才講的好處可能學生都不曉得。另一方面我不曉得你們做這麼多事情，系裡面有多少位老師？

聖容：這也是我們一個長期的問題，這也是我把 2/2 換成 2/1 的原因，因為個別指導大學生的論文是不算在教學負擔裡面，是額外工作，就像指導博士論文一樣。

鎮華：這樣你要有足夠的人力才足以做這個事情，不是嗎？

聖容：所以我們主修數學的學生有 40-50 位以後，系裡的部分同仁覺得我們已經沒有辦法再多收了，因為這是資源和人力的一種分配。我聽說我們每年 40 個學生中大概有 20 個會做論文，那 20 個當中大概有三分之一會選外系的教授(譬如他到工學院去選一個教授做跟數學有關的論文，只要跟數學有關的我們都接受)。其他三分之二在我們系裡，所以每

年我們大概就有十來個學生選本系老師做論文，我們有 25 個正教授，部分助理教授也收大學生做論文，所以我們大概有 30-40 個人平均分配這些工作。

許：會不會有老師覺得大學部學生怎麼有能力做論文？

聖容：有的是指導念書，念文章，整理人家的文章，然後老師再指點一些新方向，所以論文的深淺是彈性的。

許：一對一的指導，老師對學生的影響就很大。

鎮華：你們有碩士班嗎？

聖容：我們沒有碩士班。

鎮華：這就可以省下很多人力。臺灣有一個非常大的問題是碩士班的學生非常的多，指導他們佔掉我們老師非常大的人力。

聖容：也許你們的碩士班就跟我們做 senior thesis 差不多。

鎮華：對，教育部在許多年前要我們擴大碩士班的招生，所以消耗掉非常大的師資人力。

聖容：即使像台大這樣頂尖的數學系也是要收很多碩士學生嗎？

鎮華：對。我認為這是教育部弄出來一個非常壞的制度。

聖容：我們沒有這個。所以我們是一邊去注意大一大二的普及化教育，一邊還想辦法培養數學系將來做研究的尖端人才，這是兩邊一起進行。這是我們的宗旨。

許：主修數學的學生只有 1/3 最後才走到數學研究，其他 2/3 的學生呢？

聖容：很多學生畢業以後都去工業界、金融界、Google 或科技業。

許：對主修數學的學生除了提供傳統數學的課程外，還有甚麼樣的課程要求？

聖容：我們也開很多應用數學課。我們的基本數學課程要求佔全部課程的比例不是那麼重(數學必修課我猜只佔比全部課程的二分之一，其他都是選修。)，所以學生有很多自由度，可以選很多外系的課。

許：臺灣數學必修課程佔的比率相對是高的，所以就擠壓到選課的空間。

聖容：在美國早年我讀研究所的時候就聽到很多人在討論，他們覺得臺灣或日本、韓國的教育，出來的學生平均比國外主修數學的學生選的數學課層次多一年到兩年。但是這種做法其長期的優點和缺點值得我們進一步的觀察。好處是學生一進來對數學都是純熟的，我有時候覺得美國學生怎麼剛開始都不會算，基本工具沒有我們純熟。可是美國學生一但決定念以後，他們很活。所以我們的優勢是剛開始的，後來很難講繼續擁有這優勢。

鎮華：您剛剛提到東方或者是臺灣的學生提早學習這個事情，其實不只是在大學，在國小開始就已經是這樣了。

聖容：這樣的好處是我們都很紮實。

鎮華：但是也有可能像您剛剛講的，一早就被緊繃得很緊，到後面的階段就上不去了。

聖容：學術研究是一個長期事業，出發點當然很重要，到最後那個動力也很重要。後力比前力更重要，所以要讓學生有興趣。我們的教育有很成功的地方，所以不是說都是很差的。我個人比較贊成像 Princeton 這樣的做法，你要做一個全面的教育，將來才會是一流的人才。因為我們將來在社會上做事，除了學問以外還有很多別的因素，人格的成熟、語言表達能力、人際溝通都是很重要的。這個是大學教育的一個宗旨。我想臺大應該也是

這樣，綜合教育。

鎮華：理論上是希望朝這個方向走，但是有沒有達成是另一回事。大學生要修 28 個學分的通識教育，但是有沒有完全達到理想就很難說了。

聖容：你們有沒有看過前一陣子去世的 Apple 創始人—賈伯斯的訪問。這個人很特別，他的家境不是很好，父母花了很多力量送他到奧瑞岡的一所學費很貴的私立大學就讀。他去大學念了一年之後，因為有很多學分學費很貴，所以他不註冊了。在這一年當中他住在學校附近，或甚至在同學的沙發擠著。他聽了很多課。他聽課的第一標準是他覺得這個東西有趣他就去聽，他反而不要主修或是學分。那時候他選了書法(甚至還有中文的書寫)，當時他覺得很有趣他就去選了。那門課日後對他在 Apple 電腦的設計排版上非常有用，他知道字體怎樣變大變小怎樣排才美。所以學生不要限制他們的發展，要讓他們挑有趣的東西學，將來什麼東西是有用的什麼東西是沒有用的是很難講的，學生覺得非常有趣的東西，願意花時間去學就是有用的東西。

許：AMS 前主席—Eric Friedlander 於 2013 二月份 Notices 的訪問裡提到數學未來整體發展的一些憂慮。特別地，他對美國大學的數學教育感到特別憂心。從您在美國大學任教的多年經驗，你覺得美國的大學數學教育有什麼特別值得擔憂的地方？

聖容：一般來說大學生程度在降低並且學生集中力的時間比較短，不願意選數學這種需要長期花功夫才學得好的東西，所以很多地方都要開很多補救的課。我們要好好檢討學生程度降低，集中力時間短這兩件事情。學生程度在降低，我們要想辦法，另一方面我們要改變我們教育的方式。比如說以前中國人都要練書法，花很多時間來練字，這需要很多功力很多定力，逐漸這個東西就變落伍了，沒有人要去學這個東西，我們要小心我們的數學教育也變成這樣。現在電腦發展的這樣快，如果微積分還要像以前，花太多時間教大家練習計算的技巧，由此看來如此學微積分也許是不合時代的。

許：2012 數學年會時舉辦的「系所發展經驗交流座談」(詳細內容請參考 2013 年 3 月份數學會電子報)也充分的反應剛才講的事情。臺灣於 90 年代大量增設大學再加上人口減少，所有的學生都進入大學，學生的程度就相對降低。另外，現代年輕人因為好奇的東西太多了，集中力及學習熱情相對也降低了。

聖容：對啊，而且現在的東西都變化好快，像電影都是快節奏的，但是數學學習就快節奏不起來，所以學生就不容易耐下心來學這樣的東西。

許：Friedlander 於文中也提到所謂的 MOOCs (Massive Open Online Courses)，不知道你對這方面的了解有多少？

聖容：我所知道的是現在有一些人把史丹佛、Princeton 最好的教員講的課錄影下來，或者製成 computer program，讓大家可以免費下載，可以自學。我對這件事情是非常贊成的，有一部分人覺得既然微積分以後都可以上線，也許教員的基本飯碗就丟了，就沒有人來選課了，我覺得這個問題是不存在的。我覺得一個東西越多人用就越受歡迎，讓別人有接觸的機會，就會越有興趣，將來選數學的人就越多。另外一方面我的感覺是線上學習效果不會太大。我覺得真的會線上自己選課的都是動機很強的學生，大部分的人學習過程當中都需要在教室裡面跟同學互相切磋。

許：台灣現在也有很多開放式課程。開放式課程不會取代我們的工作，但是它是非常好的學習輔助工具。所以我覺得我們應該積極參與，把開放式課程的內容做的更好，更有吸引力。

聖容：是。像 MSRI 就有一個線上資源網，它有系統地把每個人的短期課程都錄影，然後編成影片，可以隨時進去查。我個人就受益無窮，我有時候想學一個課題，我就進去查，然後我可以重複的觀看，看不懂的地方也可以回來再看，這個效果當然是好的。

許：有一年我當大一的導師，學生在高中以前都沒接觸證明，我問他們現在如何克服數學證明的困難。學生說他們剛開始上課也都聽不懂老師到底在說(證)什麼，後來課後重複看上課的影帶，他們就慢慢學會了。所以開放式課程式也可以是輔助數學學習的一個有力工具。

聖容：對。如果設計好的話可以有很好圖像或結合電腦，學生會更有興趣。所以這個東西將來絕對是我們教數學的一個方向，不會取代老師。因為要花很多的人力去設計教材，我覺得會更需要老師。也許學數學就跟 play video game 一樣，學生就比較有興趣。例如幾何能跟電腦配合就會有很多學生想學(比如說現在美國電影界的動畫或年輕人喜歡的 video game 很多都跟幾何有關)。如果讓學生覺得是很有用的課，很多人就願意學。我現在很多同事私下教小孩也都在網上下載教材。

鎮華：因為現在太方便了。

聖容：有的教材非常好。我覺得這一方面臺灣是可以發展的，因為臺灣有很多電腦很好的人才。而且這樣的教學可能學生會比較喜歡。我現在到圖書館去看每個人都坐在電腦前面。

許：上次訪談(詳細內容請參考 2013 年 3 月份數學會電子報)您也提到，現在所謂受過數學教育的人，除了微積分以外，計算的能力及對統計跟機率有粗淺的認識都是同樣的重要，您能不能就這點多談一些。

聖容：就我個人的體會，我覺得數學本質已經在改變了，我們以前通常是很精很深，看的比較局部性。現在因為電腦的發展，資料量很大，應用的範圍很寬，所以現在做數學的年輕人都會注意數學用在哪兒。處理及分析大量的訊息(information)是一個主要的數學方向，因為以前不能做的事現在開始能做。我們處在一個比較關鍵性的時代，年輕人向前看天地變得很快，數據很多，數學發展性是放射性的，所以要以比較大的眼光來看這個事情。所以電腦的知識是數學的一部分，也可以說數學是電腦的一部分，我們很需要運用這個工具來做一些事情或者解決很基本(fundamental)的事情。也許我比較像應用數學家吧。現在其實大部分 pure math 的人，憑良心講對統計或應用數學都不了解，覺得應用數學比較不深入。這其中有一個原因是很多做應用數學的人只是講了一些名詞，而不是解決實際問題(attack real problem)。應用數學的報告，如果是真的解決實際問題的話，大家是很歡迎的。

鎮華：很感謝您這個重要的看法。教育本來就是一個相當複雜的事情，它牽涉的層面是非常廣也非常的深，並且我們必須隨著時代的進展及環境的變遷來調整教育的內容及方式。很感謝您在大學數學教育的一些重要面向上提供了您寶貴的經驗和看法。我們期待它能作為國內大學數學教育變革的一份重要資糧，同時也希望能有更多人能一起來探討大學數學教育的不同面向並分享其經驗。